НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

До захисту допущено
В. о. завідувача кафедри
__________ О.Л. Тимощук
«___»_____________20__ р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 "Системний аналіз"
на тему: «Аналіз вибору методу оцінки вартості опціону для прийняття ефективного рішення»

Виконав:
Студент IV курсу, групи КА-61
Зубрійчук Євгеній Олексійович __________

Керівник:
доцент, к.ф.м.н., доцент
Каніовська Ірина Юріївна __________

Консультант з економічного розділу:
доцент, к.е.н., доцент
Шевчук Олена Анатоліївна ________

Консультант з нормоконтролю:
доцент, к.т.н., доцент
Коваленко Анатолій Єпіфанович __________

Рецензент:
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей к. ф.-м. н., доцент
Буценко Юрій Павлович __________

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________

Київ – 2020 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 124 "Системний аналіз"

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління»

ЗАТВЕРДЖУЮ

В. о. завідувача кафедри

__________ О.Л. Тимощук

«___»_____________20__ р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу студенту
Зубрійчук Євгеній Олексійович

1. Тема роботи « Аналіз вибору методу оцінки вартості опціону для прийняття ефективного рішення», керівник роботи Каніовська Ірина Юріївна, доцент, кандидат фізико-математичних наук, затверджені наказом по університету від «25» травня 2020 р. №1143-с

2. Термін подання студентом роботи:

3. Вихідні дані до роботи: моделі оцінки вартості опціонів, історичні дані продажу опціонів на біржі.

4. Зміст роботи: дослідження особливостей предметної області, розрахунок теоретичної вартості опціону.

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо): презентація.

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Економічний	Шевчук О.А., доцент		

7. Дата видачі завдання: 15 квітня 2020 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Затвердження теми БДР	10.04.2020 – 15.04.2020	виконано
2	Ознайомлення зі структурою БДР згідно з Положенням про державну атестацію студентів НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»	10.04.2020 – 15.04.2020	виконано
3	Проведення дослідження над темою БДР під керівництвом керівника	15.04.2020 – 28.04.2020	виконано
4	Завершення роботи над першим варіантом основної частини БДР	28.04.2020 – 12.05.2020	виконано
5	Реалізація моделей на мові програмування Python	12.05.2020 – 15.05.2020	виконано
6	Робота над експериментальною частиною БДР.	15.05.2020 – 19.05.2020	виконано
7	Аналіз результатів, отриманих при проведені роботи над експериментальною частиною БДР	12.05.2020 – 19.05.2020	виконано
8	Розробка інтерфейсу користувача програмного продукту	19.05.2020 – 26.05.2020	виконано
9	Оформлення БДР згідно ДСТУ	19.05.2020 – 26.05.2020	виконано

Студент Зубрійчук Є.О.

Керівник Каніовська І.Ю.

РЕФЕРАТ

Дипломна робота містить 79с., 10 рис., 15 таблиць, 2 додатки, 14 джерел.

ОПЦІОН, ФОНДОВИЙ РИНОК, ІНВЕСТУВАННЯ, БІНОМІАЛЬНА МОДЕЛЬ, ТРИНОМІАЛЬНА МОДЕЛЬ, МОДЕЛЬ БЛЕКА-ШОУЛЗА, КОМБІНОВАНА МОДЕЛЬ.

Об’єктом дослідження роботи є біржові опціони та їх ціноутворення.

Предметом дослідження є методи розрахунку теоретичної вартості опціонів.

Метою дослідження є порівняння існуючих класичних та модифікований методів оцінки вартості на основі реальних історичних даних.

У роботі наведено основні викладки теорії опціонних контрактів та розглянуто дві класичні моделі – біноміальна модель та модель Блека-Шоулза, а також дві модифіковані моделі – триноміальна модель, яка є модифікацією біноміальної, та комбінована модель, яка включає в себе триноміальну та модель Блека-Шоулза.

Порівняльний аналіз розглянутих моделей здійснений на основі реальних історичних даних опціонів на індекс S&P 500 Чиказької біржі опціонів (Chicago Board Options Exchange). Дані взяті за період вересня 2018 року. Отримані результати дали змогу встановити переваги та недоліки розглянутих методів та підтвердити деякі теоретичні твердження, що наведені у роботі.

Розроблений програмний продукт на мові програмування Python, який можна використовувати для оцінки вартості опціонів розглянутими методами.

ABSTRACT

The theme “Analysis of choice of the assessment method of option cost for making an effective decision”

The diploma project: 79p., 10 fig., 15 tables, 2 appendixes, 14 references.

OPTION, STOCK MARKET, INVESTMENT, BINOMIAL MODEL, TRINOMIAL MODEL, BLACK-SHOWLS MODEL, COMBINED MODEL.

The object of study is exchanging options and their pricing.

The subject of research is the methods of calculating the theoretical price of options.

The aim of the study is to compare existing classical and modified valuation methods based on real historical data.

The work presents the main theses of the theory of option contracts and considers two classical models - binomial model and Black-Scholes model, as well as two modified models - trinomial model, which is a modification of binomial one, and combined model, which includes trinomial and Black-Scholes model.

The comparative analysis of the considered models is carried out on the basis of real historical data of options on the S&P 500 index of the Chicago Board Options Exchange (CBOE). Data is taken for the period of September 2018. The obtained results allowed to establish the advantages and disadvantages of the considered methods and to confirm some theoretical statements presented in the work.

A software product in the Python programming language has been developed and can be used to estimate the value of options by the considered methods.

ЗМІСТ

ВСТУП

Впровадження біржової торгівлі опціонами Чиказькою біржою опціонів у 1973 р. зробило революцію у біржовій торгівлі. Успіх Чиказької біржі ініціював початок опціонної торгівлі на Американській, Філадельфійській, Тихоокеанській фондових біржах, а також на фондових біржах близького сходу.

Оцінка вартості опціону є актуальною та однією за найскладніших задач фінансової математики, але попри це, теорія оцінки вартості опціонів розглядається як найуспішніша теорія в фінансовій математиці. Оцінка вартості опціону допомагає пом'якшити істотні недоліки традиційних методів фінансових розрахунків і застосовувати кількісні підходи по відношенню до інвестиційних рішень там, де дані методи не працюють. Це означає можливість більш адекватного аналізу стратегічних рішень.

Актуальність теми підтверджується тим, що ринок опціонів є невід’ємною частиною термінового ринку, що дозволяє отримувати прибуток в умовах постійної мінливості ринкової кон’юнктури. Це стає можливим завдяки проведенню операцій хеджування, тобто операцій на ринку похідних інструментів, метою яких є мінімізація і трансформація ризиків.

Класичними моделями оцінки вартості ціни опціону є модель Блека-Шоулза та біноміальна модель. Ними користуються вже декілька десятиліть та про них написано доволі багато робіт та статей. У цій роботі розглянуті більшу сучасні, модернізовані методи та моделі, проведено їх порівняльний аналіз та виділені основні переваги та недоліки перед класичними моделями.

Робота складається з п’яти розділів. Перший розділ включає у собі основні аспекти та поняття теорії опціонів, а також принципи ціноутворення опціонів.

У другому розділі розглянуті моделі оцінки теоретичної вартості опціонів: класичні та модернізовані.

Третій розділ містить опис та результати розв’язання задач, що базуються на реальних даних фондових бірж, на основі яких проведений порівняльний аналіз описаних у другому розділі моделей.

Четвертий та п’ятий розділи присвячені функціональному та вартісному аналізу програмного продукту та оцінці характеристик умов праці згідно існуючих нормативів відповідно.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ОПЦІОНІВ

1.1 Означення опціону

Означення. Опціоном (або опціонним контрактом) називають цінний папір, що дає власнику право (опцію) продати або придбати деякий базовий актив продавцю (у продавця) опціону. Натомість, сторона, яка продала (виписала) опціон зобов’язана виконати умову, тобто купити або продати базовий актив згідно з опціонним контрактом. Продаж або придбання базового активу за опціонним контрактом може відбутися до терміну закінчення опціонного контракту (або точно в термін закінчення – період експірації) за фіксованою ціною, що вказана в опціонному контракті – ціна виконання (або страйк) [1].

Базовий актив це певний цінний біржовий товар, який поставляється за певними контрактами, або вартість якого є базою розрахунків вартості похідних цінних паперів. В ролі базового активу може бути будь-що, що має вартісну оцінку: матеріальні товари (нафта, дорогоцінні метали, дорогоцінне каміння), акції, фондові індекси або ф’ючерси, що лежать в основі термінових контрактів, валюта.

Ціна опціону (або премія) називають суму, яку покупець опціону виплачує продавцю під час укладання опціонного контракту. Опціон також може бути проданий власником на біржі за певну ринкову вартість. Опціон є похідним цінним папером, тому що його вартість залежить від вартості базового активу.

Так як опціон надає власнику право придбати або продати базовий актив, а не зобов’язує, то очевидним є той факт, що опціон буде виконаний, тобто відбудеться купівля-продаж за опціонним контрактом, лише тоді, коли це буде вигідно власнику опціону – у разі коли прибуток буде перевищувати сплачену ціну за опціон. Саме через цю властивість опціонів як фінансових інструментів – збиток попередньо обмежений, а прибуток потенційно необмежений – вони здобули таку популярність.

1.2 Види опціонів

1.2.1 Опціони колл та пут

Із означення опціону природньо слідує існування двох основних типів опціонів – опціон на купівлю та опціон на продаж базового активу. Опціон, що надає власнику право придбання базового активу називається опціон колл (з англ.: call). Опціон, що надає власнику право продажу базового активу називається опціон пут (з англ.: put). Терміни «опціон колл» (Call option) та «опціон пут» (Put option) перейшли до української мови з англійської у чистому вигляди, без зміни вимови [1].

Опціон колл (пут) називається «в грошах», якщо поточна ціна базового активу вища (нижча) за ціну страйку. Опціон колл (пут) називається «при своїх», якщо поточна ціна базового активу дорівнює ціні страйку. Опціон колл (пут) називається «поза грошима», якщо поточна ціна базового активу нижча (вища) за ціну страйку.

Нехай ціна купівлі опціону колл та пут з деяким базовим активом дорівнює 1 умовній грошовій одиниці, а ціна страйку – 20. Зобразимо графіки прибутку/збитку за опціонами колл та пут у момент їх виконання (рисунок 1.1): C – прибуток за опціоном колл, P – прибуток за опціоном пут, S – поточна ціна базового активу, X – ціна страйку. Введені позначення будемо використовувати й надалі.

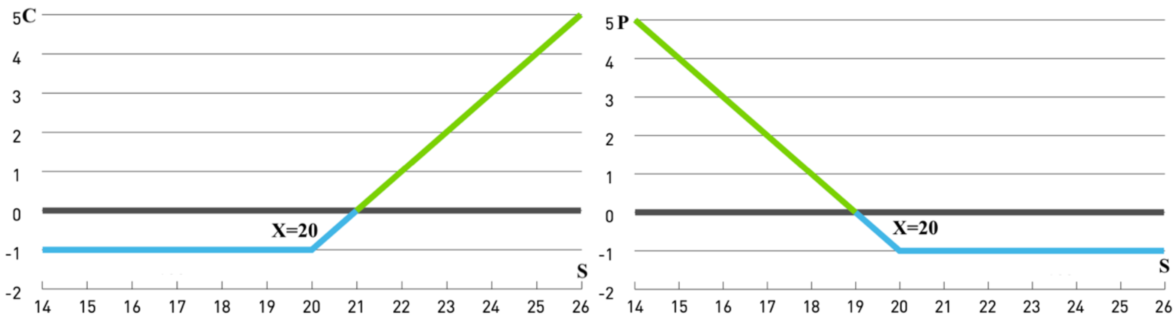


Рисунок 1.1 – Виплати за опціонами колл (C) та пут (P) у момент виконання

1.2.2 Американські та європейські опціони

Відмінність між американських та європейських опціонами полягає у часі їх виконання. Виконати американський опціон можна у будь-який момент до терміну закінчення дії, відмінно від європейського опціону, виконати який можна лише в момент закінчення його терміну дії. Більшість опціонів, якими торгують на біржах являються опціони американського типу, проте аналізувати європейські опціони простіше. Природньо, що ціна американського опціону буде не менша, я майже завжди значно вища, ніж ціна аналогічного європейського опціону, адже перший дає власнику більшу гнучкість у можливостях реалізації, тобто виконати опціон у будь-який момент, який власник опціону буде вважати найоптимальнішим, до кінця його періоду експірації [2].

Варто зазначити, що попри широке поширення опціонів американського та європейського типів, останнім часом вони не в повній мірі охоплюють усі вимоги учасників біржової торгівлі. Саме тому почали з’являтися опціони гібридних типів, такі як середньоатлантичний, квазіамериканський, бермудський та інші, проте вони не будуть надалі розглядатися у роботі.

1.2.3 Реальні опціони

Виникає питання: чи лише фінансові опціонні контракти дозволяю своєму власнику отримувати вигоди від зміни вартості базисного активу Ухвалення рішень по управлінню в бізнес-середовищі часто може мати вплив на вартість бізнесу, схоже з ефектом від володіння гіпотетичним опціонним контрактом, що називається реальним опціоном.

Реальний опціон – це опціон, базовий актив якого є товар готівкового ринку: сира нафта, дорогоцінні, чорні чи кольорові метали, вугілля, виробничу потужності та інвестиції, тощо. Прибуток від реалізації реального опціону може бути не лише у вигляді готівки, а й у вигляді збільшення оціночної вартості компанії.

Існує декілька класифікацій реальних опціонів за такими ознаками: характеру дій, джерела невизначеності, ступеня складності та поділу балансу компанії. Нижче наведені види реальних опціонів за переліченими ознаками [4].

За характером дії:

- Опціон росту – надає компанії можливість здійснити додаткові інвестиції та збільшити обсяг продажів при вирішенні будь-якої невизначеності.
- Опціон переключення – надає можливість переключення компанії між продуктами, процесами і виробничими потужностями у відповідь на зміну ринкових умов.
- Опціон очікування – надає можливість відкласти інвестиції а, отже, і отримання вигоду від реалізації будь-якого іншого рішення в надії на сприятливу зміну ринкової кон'юнктури.
- Опціон припинення – надає можливість відмовитися від будь-якої діяльності в майбутньому в разі скорочення вартості бізнесу, викликаної її виконанням.

За ступенем складності:

- Простий – надає компанії можливості, які можна описати основними видами опціонів.
- Складений – надає компанії можливості, що можна описати лише необхідною комбінацією декількох основних видів опціонів.

За поділом балансу компанії:

- Опціони зі сторони активів – надають компанії можливість використовувати гнучкість управління для отримання вигоди.
- Опціони зі стороні пасивів – надають можливість контрагентам використовувати гнучкість управління для отримання користі, завдаючи збитки компанії, вартість якої оцінюється.

1.2.4 Опціони на індекси та опціони на ф'ючерси

Як вже було сказано, базовим активом опціону може бути майже будь-що, що має вартісну оцінку, в тому числі і фондові індекси – індексні опціони (index option). Фондовий індекс (stock index) це індикатор, що відображає вартість гіпотетичного портфелю акцій, де вага долі акцій дорівнює долі коштів, що інвестовані у цей портфель. Найпопулярніші індекси у США являються S&P 500 (SPX), S&P 100 (OEX), Nasdaq 100 (NDX) и Доу-Джонса (DJX). Індексні опціони можуть також бути як американськими (наприклад, опціон на індекс S&P 100), так і європейськими (наприклад, опціон на індекс S&P 500).

Один індексний опціонний контракт укладається на суму, що у 100 разів перевищує величину індексу, при цьому розрахунок при виконанні опціону виконується готівкою. Це означає, що при виконанні індексного опціону колл його власник отримує $100 \cdot (S - X)$ умовних грошових одиниці, а при виконанні опціону пут – $100 \cdot (X - S)$ [2].

Іншим популярним видом опціонів є опціони на ф’ючерси (ф’ючерсні контракти), тобто опціони, базовим активом яких є ф’ючерсні контракти (зазвичай, термін яких закінчується незабаром після виконання опціону). Ф’ючерсний контракт – це договір про купівлю або продаж певного активу в майбутньому за попередньо визначеною ціною. Виконання ф’ючерсного опціону передбачає поставку відповідного ф’ючерсного контракту та готівкову суму, що являє собою різницю між ф’ючерсною ціною та ціною та страйком опціону.

1.3 Формування вартості опціону

Як і при визначенні ціни, за якою продається акція на ринку, саме ціна та попит впливають на ціну, за якою торгується опціон. Інвестор, який намагається купити опціон, повинен зробити це у інвестора, який хоче продати (виписати) опціонний контракт. Учасники ринку опціонів, однак, оцінюють як стійкі фактори, так і фактори, що постійно змінюються, щоб визначити ціну, за якою торгується опціон – вартість опціону.

Для розуміння подальших викладок дамо декілька означень.

Означення. Волатильність – показник, який характеризує швидкість зміни вартості базового активу на ринку. Волатильність не враховує напрямок руху ціни.

Означення. Безризикова процентна ставка є номінальною процентна ставка за цінними паперами, що являє собою суму реальної процентної ставки та поправки на інфляцію.

Можна виділити наступні факторів, що впливають на вартість опціону:

1) Поточна вартість базового активу.
2) Страйк опціонного контракту.
3) Період експірації опціонного контракту.
4) Волатильність ринку базового активу.

5) Безризикова процентна ставка.
6) Дивідендні виплати під час терміну дії опціонного контракту (лише для опціонів, базовим активом якого є дивідендні акції).

Як зазначалось раніше, інвестор, який купує опціон колл, припускає, що ціна на базовий актив збільшиться. Виплатою цього інвестора буде різниця між ціною реалізації та ціною акцій. Зворотне вірно для опціону пут.

Ціна страйку опціонного контракту має аналогічний вплив на вартість опціону. При фіксованій ринковій вартості базового активу, ціна опціону колл буде тим вища, чим нижча ціна страйку. Зворотне твердження вірне для опціону пут. У таблиці 1.1 наведено приклад залежності вартості опціонів колл та пут на акції VOLKSWAGEN AG – PREF[1] з періодом експірації у липні 2020 р. при фіксованій вартості акцій у 115.74 €[2] від ціни страйку [3].

Таблиця 1.1 – Залежність вартості опціону від ціни страйку

Ціна страйку (€)	115.00	130.00	145.00
Ціна опціону колл (€)	11.91	4.81	1.48
Ціна опціону пут (€)	8.11	16.23	27.79

Ринкова вартість базового активу разом із ціною страйку опціонного контракту формують внутрішню вартість опціону.

Означення. Внутрішньою вартістю опціону називають величину $C = \max(0,\ S_t - X)$ (для опціону колл) та $P = \max(X - S_t,\ 0)$ (для опціону пут), де S_t – вартість базового активу у момент часу t, X – ціна страйку опціону. Варто зауважити, що внутрішня вартість опціону не може бути менша від нуля, адже власник опціону виконує його лише в тому випадку, коли опціон «у грошах», тобто коли це вигідно робити [1].

[1] Акції компанії Volkswagen Group

[2] Данні взяті з live.euronext.com та londonstockexchange.com на момент 14.05.2020

Окрім внутрішньої вартості опціону, що фактично відображає наскільки опціон прибутковий у конкретний момент, опціон має зовнішню вартість. Зовнішня вартість опціону відображає очікування від опціону виграти у ціні до моменту його терміну дії, тобто ймовірність того, що у майбутньому внутрішня вартість опціону збільшиться. Зовнішня вартість опціону залежить від терміну виконання – чим більший термін виконання, тим вища ймовірність вирости у ціні, тим вища зовнішня ціна [2]. У таблиці 1.2 наведено приклад зміни ціни опціонів колл та пут залежно від періоду експірації: базовий актив – акції VOLKSWAGEN AG – PREF, ціна страйку = 120.00 €.

Таблиця 1.2 – Залежність вартості опціону від періоду експірації

Період експірації	Червень 2020 р.	Липень 2020 р.	Вересень 2020 р.
Ціна опціону колл (€)	7.19	9.09	11.70
Ціна опціону пут (€)	7.94	10.29	13.80

Опціонні контракти коштують більше на базовий актив, який має високу волатильність, ніж на активах що мають незначну волатильність, тобто ціна яких є більш стабільно.. Нестабільність технічно визначається з точки зору стандартного відхилення; однак, для наших цілей волатильність може вважатися просто показником того, наскільки ми не впевнені в майбутньому руху цін на активу. Зі збільшенням мінливості збільшується ймовірність того, що акція зробить значний рух вгору чи вниз, що тягне за собою зростання вартості опціонів колл та пут відповідно [3].

Якщо базовим активом опціону є акції, то виплати дивідендів також впливають на вартість опціону. Після виплати дивідендів ціна акції знижується, з чого слідує, що вартість опціону колл зв’язана зворотною залежністю з розмір очікуваних виплат дивідендів, а вартість опціону пут – прямою залежністю.

1.4 Висновки до розділу

У розділі були подані основи теорії опціонів, а саме дано означення опціону, наведено класифікацію за видом, типом та базовим активом, а також визначено основні характеристики опціонів та фактори, що на них впливають. На додаток були розписані основні види реальних опціонів та їх роль в управлінні та ціноутворенні компаній.

Визначили поняття ціни опціону та з'ясували залежність від основних факторів впливу. Зокрема, було встановлено, що вартість опціону колл (пут) має пряму (обернену) залежність від поточної ринкової ціни базового активу, обернену (пряму) залежність від ціни виконання опціону, пряму залежність від терміну дії опціонного контракту та волатильності. Також було зазначено, що на вартість опціону також впливають безризикова процентна ставка та дивідентні виплати у випадку акційних опціонів.

Ці теоретичні знання допоможуть у розрахунках моделей визначення теоретичної вартості опціону.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНІ ТА МОДИФІКОВАНІ МОДЕЛІ ОЦІНКИ ВАРТОСТІ ОПЦІОНІВ

2.1 Біноміальні дерева

2.1.1 Найпростіший приклад

Одним з найпоширеніших методів оцінки опціонів є побудова біноміального дерева, тобто діаграми, яка демонструє можливі варіанти зміни ціни базового активу протягом терміну дії опціону.

Цей метод базується на припущенні, що в основі ціни базового активу лежать закони випадкового процесів, а саме випадкового блукання. На кожному дискретному кроці по часу ціна активу може збільшиться з певною ймовірністю – позначимо цю ймовірність p $(0 < p < 1)$, або зменшиться – з ймовірністю $q, (q = 1 - p)$ на якусь відносну величину. У цьому розділі буде розглянуто підхід, що був викладений у статті Кокса, Росса та Рубінштейна, що була опублікована у 1979 році.

Для розуміння моделі почнемо з простого прикладу: нехай базовий актив це певна акція, поточна ціна якої дорівнює \$20 і при цьому відомо, що у наступному кварталі (через 3 місяці) ціна може зрости або понизитись на \$2. Нам необхідно оцінити вартість європейського опціону колл з ціною страйку \$21 та періодом експірації 3 місяці. Якщо ціна акції виросте на \$2, то вартість опціону у момент виконання буде дорівнювати $C = \max(0, 22 - 21) = 1$ (\$), в інакшому випадку – $C = \max(0, 21 - 22) = 0$ (\$). Зобразимо цю ситуацію у вигляді простого біноміального дерева – рисунок 2.1.

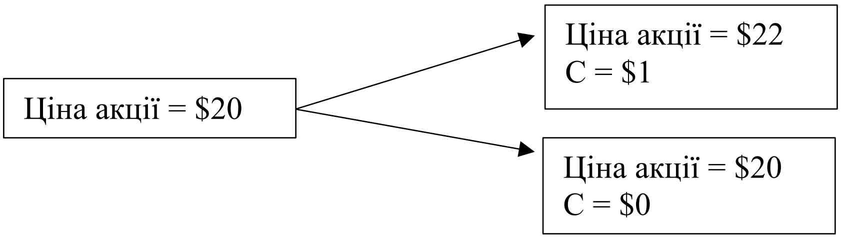


Рисунок 2.1 – Приклад зміни ціни на акцію

Для того щоб оцінити вартість опціону необхідно зробити припущення про відсутність арбітражних можливостей. Це означає, ринок вважається ефективним, тобто передбачається, що «справедлива» вартість опціону відповідає його реальній вартості, за якої жодна зі сторін в середньому не отримує прибуток.

Далі необхідно скласти інвестиційний портфель, що буде складатися із акції та опціону на неї таким чином, щоб вартість портфелю через три місяці була чітко визначена. Оскільки цей інвестиційний портфель не схильний ризику, прибуток, який він принесе за через місяці, дорівнює безризиковій процентній ставці. Це дозволяє нам оцінити вартість портфеля, а отже, і вартість опціону. Оскільки в нашу портфель входять два цінні папери (акція та опціон) і є тільки два можливих результату, можливість створення безризикового портфеля існує завжди.

Розглянемо портфель, що складається з довгої позиції[3] за пакетом з Δ акцій короткій позиції[4] за опціоном колл. Необхідно розрахувати значення Δ так, щоб інвестиційний портфель гарантовано був безризиковим. Якщо ціна акції зросте на $2, то вартість портфелю буде дорівнювати $\Delta 22 - 1$, що складає різницю між загальною вартістю акцій за новою ціною та вартості опціону. Якщо ціна акції знизиться на $2, то вартість портфелю буде складати $\Delta 18$,

[3] Довга позиція – покупка активу, цінного паперу з метою продати у майбутньому для отримання вигоди.

[4] Коротка позиція – ситуація займу активу, цінного паперу з метою подальшого викупу для отримання вигоди.

адже опціон у такому випадку буде коштувати 0. Портфель буде безризиковий, якщо в обох можливих випадках його вартість буде однаковою, тобто:

$$\Delta 22 - 1 = \Delta 18 \implies \Delta = 0.25,$$

а вартість портфелю в обох випадках буде дорівнювати \$4.5.

З припущення про відсутність арбітражних можливостей слідує, що прибуток від безризикового портфелю повинен дорівнювати безризиковій процентній ставці r (нехай $r = 12\%$), а тому, поточна вартість портфелю дорівнює поточній вартості 4.5 доларів і дорівнює:

$$4.5e^{-0.12\frac{3}{12}} = 4.5e^{-0.03} = 4.367$$

Знаючи поточну вартість акції маємо, що ціна опціону $C = 0.25 \cdot 20 - -4.367 = 0.633$.

2.1.2 Узагальнення на випадок одного кроку

Описані вище викладки можна узагальнити. Нехай поточна вартість базових акцій S_0, вартість опціону колл С, час експірації опціону T. Нехай за період експірації опціону вартість акцій може вирости до $S_0 u$ $(u > 1)$, або впасти до $S_0 d$ $(d < 1)$, при чому для усунення можливості арбітражного прибутку має виконуватись нерівність $d < e^{rT} < u$, де e^{rT} – прибуток, що відповідає нарахуванню за безризиковою процентною ставкою r за час дії опціонного контракту. У наслідок зміни ціни акції вартість опціону колл також зміниться та буде складати C_u або C_d відповідно. Аналогічно прикладу ситуація зображена на рисунку 2.2.

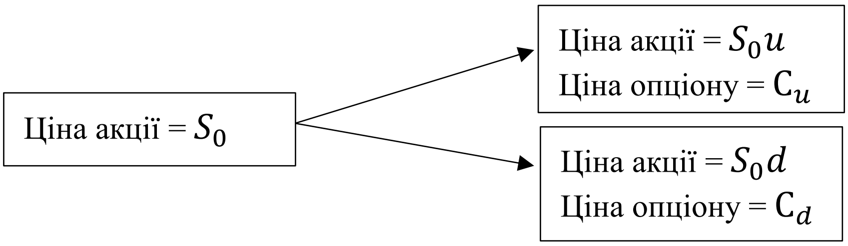


Рисунок 2.2 – Зміна вартості акції та опціону

В такому випадку на момент експірації опціону вартість портфелю буде дорівнювати $\Delta \cdot S_0u - C_u$ та $\Delta \cdot S_0d - C_d$ при збільшенні та зменшенні ціни акції відповідно. Прирівнявши ціну портфелю в обох випадках отримуємо значення

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_0u - S_0d}$$

тобто відношення зміни вартості відповідного опціону до зміни вартості базової акції. Маючи значення безризикової ставки *r* розрахуємо поточну вартість інвестиційного портфелю:

$$\Delta \cdot S_0 - C = (\Delta \cdot S_0u - C_u) \cdot e^{-rT}$$

Підставимо значення Δ та виконаємо прості перетворення:

$$\frac{C_u - C_d}{S_0u - S_0d} S_0 - C = \left(\frac{C_u - C_d}{S_0u - S_0d} S_0u - C_u\right) \cdot e^{-rT},$$

$$C = \frac{C_u - C_d}{S_0u - S_0d} S_0 - \left(\frac{C_u - C_d}{S_0u - S_0d} S_0u - C_u\right) \cdot e^{-rT} =$$

$$= e^{-rT}\left(\frac{C_u - C_d}{u - d} e^{rT}(1 - ue^{-rT}) + C_u\right) =$$

$$= e^{-rT}\left(C_u + \frac{C_u - C_d}{u - d} e^{rT} - u\frac{C_u - C_d}{u - d}\right) =$$

$$= e^{-rT}\left(C_u + \frac{C_u e^{rT}}{u-d} - \frac{C_d e^{rT}}{u-d} - \frac{C_u u}{u-d} + \frac{C_d u}{u-d}\right) =$$

$$= e^{-rT}\left(C_u\left(1 + \frac{e^{rT}}{u-d} - \frac{u}{u-d}\right) + \frac{C_d(u - e^{rT})}{u-d}\right) =$$

$$= e^{-rT}\left(C_u \frac{e^{rT} - d}{u-d} + C_d\left(1 - \frac{e^{rT} - d}{u-d}\right)\right)$$

Далі, позначимо $p = \frac{e^{rT}-d}{u-d}$ отримаємо формулу визначення вартості опціону:

$$\mathrm{C} = e^{-rT}(pC_u + (1-p)C_d) \tag{2.1}$$

З означення внутрішньої вартості опціону (а лише саме цій вартості дорівнює загальні ціна опціону у момент виконання) маємо, що $\mathrm{C}_u = \max(Su - X, 0)\,, C_d = \max\,(Sd - X, 0)$. Отже:

$$\mathrm{C} = e^{-rT}(p\max(Su - X, 0) + (1-p)\max(Sd - X, 0))$$

2.1.2 Узагальнення на випадок декількох кроків

Використання біноміальної моделі не обмежується одним кроком - кількість ітерацій може бути довільною. Тобто час *T* до періоду експірації опціону розбивається на *N* частин: $t = \frac{T}{N}$. Аналогічно з першим кроком на кожній ітерації відбувається розгалуження можливих значень вартості базового активу – рисунок 2.3.

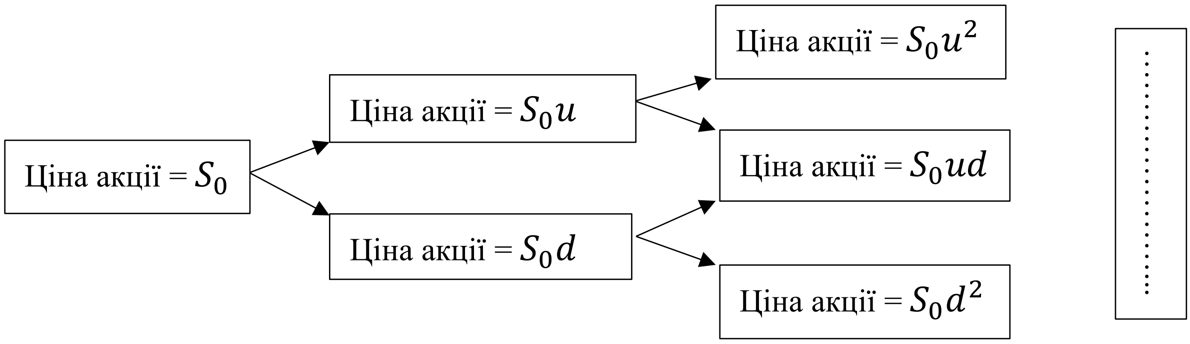


Рисунок 2.3 – Біноміальна модель зміни вартості акцій на випадок декількох кроків

Розглянемо випадок двох періодів біноміальної моделі. У другому періоді вартість базового активу може набувати значень S_0u^2, S_0ud, S_0d^2 (рисунок 2.3). Зауважимо, що на будь-якому кроці значення вартості базового активу залежить від початкового значення S_0, а не від значень на попередніх кроках, що являється основною властивістю ефективного ринку.

Нехай C_{u^2}, C_{ud} та C_{d^2} – відповідні вартості опціонів на другому кроці. За означенням внутрішньої вартості опціону колл маємо:

$$C_{u^2} = \max(Su^2 - X, 0),$$
$$C_{ud} = \max(Sud - x, 0),$$
$$C_{d^2} = \max\,(Sd^2 - x, 0)$$

Використовуючи результат отриманий у попередньому пункті, розрахуємо вартості опціону на першому кроці:

$$C_u = e^{-rt}(pC_{u^2} + (1-p)C_{ud}), C_d = e^{-rt}(pC_{ud} + (1-p)C_{u^2}) \qquad (2.2)$$

Формула (2.1) представляє значення вартості опціону колл через значення C_u та C_d. Проте, як було продемонстровано у рівності (2.2) аналогічний розрахунок можна зробити і для цих значень. Така рекурентна процедура називається зворотною індукцією. Отже:

$$\mathrm{C} = e^{-rt}(p^2 C_{u^2} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{d^2}) =$$
$$= e^{-rt}(p^2 \max(Su^2 - X, 0) + 2p(1-p)\max(Sud - X, 0) +$$
$$+(1-p)^2 \max(Sd^2 - X, 0)) \qquad (2.3)$$

Формулу (2.3) можна узагальнити на випадок *N* кроків проводячи аналогічні міркування зворотної індукції. Узагальнена формула для *N* періодів:

$$\mathrm{C} = e^{-rtN} \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j} \max\left(Su^j d^{N-j} - X, 0\right)$$

Зауважимо, що теоретична вартість європейського опціону пут розраховуватиметься за аналогічною формулою:

$$P = e^{-rtN} \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j} \max\left(X - Su^j d^{N-j}, 0\right)$$

2.2 Триноміальні дерева

Триноміальна модель є простим і елегантним розширенням біноміальної моделі, що дозволяэ отримувати оцінки, які швидше сходяться до теоретичної вартості простих опціонів європейського і американського стилю.

Триноміальні дерева в моделі, так само як і в біноміальними методі, є рекомбінованими. Тобто, траєкторії з числом кроків більше одного й одним і тим самим числом підвищення і зниження вартості будуть в результаті опинятися в одній і тій же вершині дерева. Це дуже важлива властивість дозволяє скоротити число вершин дерева, що в свою чергу виявляється дуже корисним при реалізації обчислень на комп'ютері.

Крім того, відзначимо ще одну властивість триноміальних дерев, яка стосується числа вершин. Якщо починаючи з початкової ціни, тобто з 0-го моменту часу в біноміальних деревах присутня лише одна вершина, то на першому кроці, тобто в перший момент часу, вершин буде дві, і далі число вершин налічуватиметься $3, \dots, j + 1, \dots, N + 1$. N - число кроків в моделі, а j - номер кроку. У тріноміальної моделі чисто вершин для кожного j-го кроку складе $1, 3, 5, 7, \dots, 2 * j - 1, \dots, 2 * N - 1$.

Позначимо за T – час експірації опціону, тоді $t = \frac{T}{N}$ – тривалість одного періоду (кроку), σ – волатильність, q.- дивідендна дохідність базових акцій, r – безризикова відсоткова ставка. Для кожного кроку можливі 3 варіанта зміни вартості акцій:

$$S_{j+1} = S_j u, \text{де } u = e^{\sigma\sqrt{(2t)}} \text{— ріст акцій}$$

$$S_{j+1} = S_j d, \text{де } d = e^{-\sigma\sqrt{(2t)}} \text{— падіння акцій}$$

$$S_{j+1} = S_j$$

з відповідними ймовірностями:

$$P_u = \frac{e^{\frac{(r-q)t}{2}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}}\right)^2},$$

$$P_d = \frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}} - e^{\frac{(r-q)t}{2}}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}}\right)^2},$$

$$P_m = 1 - P_u - P_d$$

Тоді для одно-етапного дерева вартість опціну буде розраховиватись наступним чином:

$$\text{C} = \frac{P_u C_u + P_m C_m + P_d C_d}{e^{rt}}$$

з розрахунком, що $\text{C}_u = \max(Su - X, 0)\,, C_d = \max\,(Sd - X, 0)$

Переваги описаної триноміальної моделі будуть показані у наступному розділі, де буде проілюстровано, що точність двох-етапного триноміального дерева не гірша за точність чотирьох-етапного біноміального дерева [7].

2.3 Модель Блека-Шоулза

2.3.1 Припущення моделі

В моделі Блека-Шулза ключовими є наступні припущення:

1. Вартість активу змінюється згідно з законом:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

де S_t – ціна акції у момент *t,*

S_0 – початкова ціна акції,

μ – параметр тренду ціни,

σ – волатильність,

W_t – броунівський рух.

2. Опціон є європейського типу, тобто виконаний можу бути лише у момент експірації.
3. Є можливість інвестування за безризиковою ставкою *r*, яка є незмінною та відомою заздалегідь.

4. Відсутня можливість арбітражу, тобто ринок є ефективним. Аналогічне припущення було і в біноміальній моделі.
5. Відсутні транзакційні витрати, тобто комісій за проведення операцій.
6. Дивідендні виплати не сплачуються за час дії опціонного контракту.

2.3.2 Формула Блека-Шоулза

Згідно моделі Блека-Шоулза, вартість європейського опціону колл буде розраховуватись за наступною формулою:

$$\mathrm{C} = S_0 N(d_1) - XN(d_2)e^{-rT}$$

де

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

N(t) – функція нормального розподілу.

Перший доданок пов’язаний з поточною ціною базового активу, яка може змінюватись з певною ймовірністю, визначенню через нормальний розподіл. По своїй суті перший доданок являє собою чистий прибуток від придбання базового активу. Другий доданок по своїй суті являє собою приведену вартість виконання опціону. Множник e^{-rT} є коефіцієнтом дисконтування, який зводить вартість до поточних цін. Логічним є те, що чим вища поточна вартість по відношенню до ціни виконання, тим вища вартість опціону. Також, чим більше відношення поточної ціни активу до ціни страйку, тим більші числа d_1 та d_2, що означає що тим вища ймовірність виконання опціону.

У попередньому розділі на стверджувалось, що чим вища волатильність, тим вища вартість виконання опціону. Проте це твердження було скоріше на інтуїтивному рівні. У формулі моделі Блека-Шоулза цей фактор також враховано: при збільшенні волатильності коефіцієнт d_1 зростає, а d_2 зменшується, адже в чисельнику квадрат коефіцієнта волатильності стоїть зі знаком мінус. Таким чином, чим вища волатильність, тим вищий прибуток та нижче вартість витрат на виконання в силу монотонності розподілу.

2.4 Комбінована модель

Технічний аналіз теоретичних динамік цін, отриманих триноміальною моделлю показали, що в рамках одного експерименту протягом одного періоду, що розглядається, трійка чисел C_R – фактична вартість опціону, C_B – вартість, оцінена за допомогою моделі Блека-Шуолза та C_T – вартість, оцінена за допомогою триноміальної моделі знаходяться в однаковій послідовності, тобто виконується одне з наступних співвідношень:

$$\begin{cases} C_R < C_B < C_T \qquad C_B < C_T < C_R \qquad C_T < C_R < C_B \\ C_R < C_T < C_B \qquad C_B < C_R < C_T \qquad C_T < C_B < C_R \end{cases}$$

Маючи цю інформацію, можна побудувати модель, яка буде комбінацією триноміального методу та моделі Блека-Шоулза. Для цього нам необхідно оцінити регресію за *k* періодів:

$$\alpha C_B + (1-\alpha)C_T = C_R \tag{2.4}$$

Після проведення регресійного аналізу отримані значення α та $1-\alpha$ використовуватимуться для побудови оцінки вартості опціону як середньозваженому значенню оцінок тригономіальної моделі та моделі Блека-Шоулза [6].

Середньозважене арифметичне значення набору чисел є узагальненим поняттям середнього арифметичного. Середньозважене арифметичне значення чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ розраховується за наступною формулою:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

де $w_1, w_2, \dots, w_n$ – відповідні ваги чисел, при чому $\sum_{i=1}^{n} |w_i| \neq 0$.

У випадку розрахунку теоретичної вартості опціону за комбінованим методом сума коефіцієнтів дорівнює 1.

У розділі 3 на реальних даних буде продемонстровано значну перевагу комбінованої моделі над іншими описаними вище. Проте очевидним є той факт, що недолік даної моделі є її складність з точки зору розрахунків, адже необхідно розраховувати одразу по двом моделям за декілька періодів та проводити регресійний аналіз.

2.5 Висновки до розділу.

У розділі були описані дві основні моделі ціноутворення опціонів – модель біноміальних дерев та модель Блека-Шоулза, а також дві модифікації – цих моделей – триноміальна та комбінована моделі.

Кожний з описаних методі має свої переваги та недоліки, які звужують їх область використання. Поява модифікацій моделей є логічним розвитком теорії опціонів, адже припущення, які допускаються у цих моделей не завжди відповідають реаліям ринку. Проте, незважаючи на недоліки моделей, їх значення та роль в теорії фінансової математики та вклад у розвиток біржової торгівлі є неоціненними.

На інтуїтивно-логічному рівні були зроблені припущення щодо переваг одних моделей над іншими, доказ яких буде завданням наступного розділу роботи.

РОЗДІЛ 3

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ОЦІНКИ ВАРТОСТІ ОПЦІОНІВ НА РЕАЛЬНИХ ДАНИХ

3.1 Вхідні данні

Індекс S&P 500 (Standard & Poor's 500) – один з найпоширеніших індексів фондового ринку США, що складається з акцій 500 компаній, які мають велику капіталізацію та представляють провідну історію економіки США.

Даний індекс обирають для таких оцінки таких факторів, як розмір ринку та ліквідність, тобто як легко придбати або продати на ринку актив або цінні папери, не впливаючи на вартість активів. призначених бути провідним показником акцій США. Індекс S&P 500 також допомагає відображати ризики, пов'язані з великими компаніями, ринкова капіталізація яких понад 10 мільярдів долларі.

Багато людей вважають, що S&P 500 є кращим представленням ринку США навіть у порівнянні з промисловим індексом Доу-Джонса, оскільки останній включає лише акції 30 компаній.

На рисунку 3.1 зображений графік значень індексу S&P 500 з 2018 року по травень 2020 року.

Опціон на індекс S&P 500 має позначення SPX. Цей опціон є європейським з максимальним терміном експірації до 12 місяців та днем експірації суботою після третьої п’ятниці місяця експірації.

Для порівняльного аналізу були обрані дані продажу опціонів Чиказької фондової біржі опціонів колл за вересень 2018 року з ціною страйку 2900 доларів США та датою експірації 21.12.2018. Дані наведено у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Дані продажу опціону SPX колл за вересень 2018 року

№	Дата продажу	Ціна базового активу на момент продажу, $	Реальна ціна опціону (ціна продажу), $	Час до експірації (T), днів
1	2018-09-04	2896.71	73.67	108
2	2018-09-05	2888.64	73.20	107
3	2018-09-06	2878.08	68.50	106
4	2018-09-07	2871.71	65.80	105
5	2018-09-10	2877.15	68.96	102
6	2018-09-11	2887.91	69.30	101
7	2018-09-12	2888.91	67.00	100
8	2018-09-13	2904.18	73.00	99
9	2018-09-14	2905.01	71.70	98
10	2018-09-17	2888.84	63.50	95
11	2018-09-18	2904.32	74.00	94
12	2018-09-19	2907.93	72.30	93
13	2018-09-20	2930.75	86.71	92
14	2018-09-21	2929.22	85.85	91
15	2018-09-24	2919.37	78.68	88
16	2018-09-25	2915.58	77.70	87
17	2018-09-26	2905.99	70.00	86
18	2018-09-27	2914.00	76.00	85
19	2018-09-28	2913.93	72.00	84

Рисунок 3.1 – Графік індексу S&P 500 за період 2018-2020 рр.

Для розрахунків теоретичної вартості опціонів значення волатильності було обрано як середньоквадратичне відхилення вартості базового активу за період продажу опціонів і складає $\sigma = 0.17$. Безризикова відсоткова ставка на у США за вересень 2018 року складає 2.5%, тобто $r = 0.025$.

3.2 Порівняння біноміальної моделі та моделі Блека-Шоулза

Основна концептуальна відмінність між даними двома моделями – представлення часу. У моделі Блека-Шоулза час є неперервним, тобто вартість базового активу може змінюватись у будь-який момент часу. Натомість біноміальна модель розглядає час як дискретні інтервали, саме лише у кінці яких може змінитися вартість опціону. Проте, при значній кількості кроків біноміальної моделі довжина часових інтервалів буде зменшуватися й прямувати до нуля. Таким чином, зі зростанням кількості кроків результати біноміальної моделі будуть наближатися до результатів моделі Блека-Шоулза.

За допомогою створеного програмного продукту була розрахована теоретична вартість опціону, що розглядається, за допомогою біноміальної моделі з довільною кількістю кроків та моделі Блека-Щоулза. Порівняємо результати. У таблиці 3.2 наведені отримані значення для відповідних моделей.

Таблиця 3.2 – Порівняння результатів біноміальної та триноміальної моделей

№	Ціна опціону, $	Результат моделі Блека-Шоулза, $	Результат біноміальної моделі з 1 кроком, $	Результат біноміальної моделі з 2 кроками, $	Результат біноміальної моделі з 3 кроками, $
1	73.67	113.88	139.95	102.76	122.69
2	73.20	108.95	134.71	99.84	117.59
3	68.50	102.82	128.06	96.18	111.11

Продовження таблиці 3.2

№	Ціна опціону, $	Результат моделі Блека-Шоулза, $	Результат біноміальної моделі з 1 кроком, $	Результат біноміальної моделі з 2 кроками, $	Результат біноміальної моделі з 3 кроками, $
4	65.80	98.98	123.78	93.77	106.96
5	68.96	99.00	124.72	93.78	108.09
6	69.30	105.02	130.04	96.42	113.40
7	67.00	104.95	129.89	96.17	113.31
8	73.00	112.64	137.72	102.20	121.11
9	71.70	112.49	137.46	102.31	120.92
10	63.50	101.88	126.20	93.41	110.03
11	74.00	109.65	134.11	99.54	117.91
12	72.30	111.04	135.38	101.83	119.23
13	86.71	123.60	147.37	119.28	131.13
14	85.85	122.06	145.75	117.50	129.61
15	78.68	114.38	137.96	108.00	122.14
16	77.70	111.57	135.07	104.43	119.37
17	70.00	105.52	128.96	96.29	113.42
18	76.00	109.37	132.63	102.02	117.12
19	72.00	108.68	131.81	101.37	116.39

Зауважимо, що біноміальна модель з одним кроком показала найгірший результат, що значно відрізняється від реальної вартості опціону. Графіки результатів відповідних моделей зображені на рисунку 3.2.

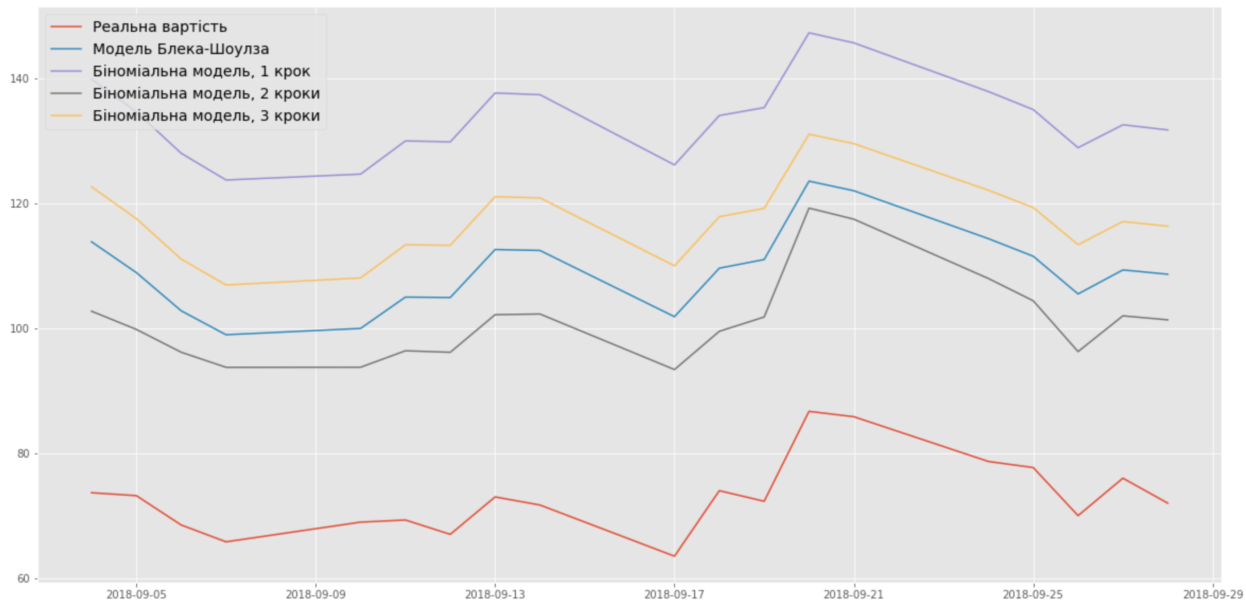


Рисунок 3.2 – Графік результатів біноміальної моделі з різною кількістю кроків та моделі Блека-Шоулза

Розрахуємо середню абсолютну похибку (MAPE):

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|\hat{y}_i - y_i|}{y_i},$$

де n – розмір в,

y_i – реальна вартість опціону,

$\hat{y}_i$ – оцінена вартість опціону.

Значення похибок наведено у таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Середні абсолютні похибки моделі Блека-Шоулза та біноміальної моделі з 1, 2, 3 кроками

Метод	Блека-Шоулза	Біноміальний з 1 кроком	Біноміальний з 2 кроками	Біноміальний з 3 кроками
MAPE	0,4999	0,8367	0,3902	0,6118

Найкращий результат на даній вибірці був отриманий за допомогою біноміальної моделі з двома кроками. Також за результатами видно, що вже на 2 та 3 кроках графік результатів біноміальної моделі стає ближчою до графіку результатів моделі Блека-Шоулза

3.2 Порівняння триноміальної та біноміальної моделей

Як зазначалося раніше, триноміальна модель є модифікацією біноміальної. У розділі 2 стверджувалось, що триноміальна модель з 2 кроками має точність не гіршу ніж біноміальна модель з 4 кроками. За допомогою розробленого програмного продукту дане твердження перевіряється далі

У таблиці 3.4 наведено результати розрахунків теоретичної вартості опціонів за допомогою біноміальної моделі кількістю кроків 4 та триноміальної моделі з кількістю кроків 2.

Таблиця 3.4 – Порівняння результатів біноміальної та триноміальної моделей

№	Ціна опціону, $	Результат біноміальної моделі з 4 кроками, $	Результат триноміальної моделі з 2 кроками, $
1	73.67	108.19	71.97
2	73.20	104.72	69.86
3	68.50	100.35	67.22
4	65.80	97.50	65.48
5	68.96	97.79	65.54
6	69.30	101.09	67.47
7	67.00	100.88	67.31
8	73.00	107.35	70.99
9	71.70	107.38	70.94
10	63.50	97.98	65.38
11	74.00	104.55	69.11
12	72.30	106.59	70.16

Продовження таблиці 3.4

№	Ціна опціону, $	Результат біноміальної моделі з 4 кроками, $	Результат триноміальної моделі з 2 кроками, $
13	86.71	122.66	78.89
14	85.85	120.94	77.88
15	78.68	111.94	72.75
16	77.70	108.56	70.83
17	70.00	100.97	66.59
18	76.00	106.19	69.38
19	72.00	105.52	68.95

На рисунку 3.3 зображено відповідний графік вартості опціонів та результатів отриманих за допомогою відповідних моделей.

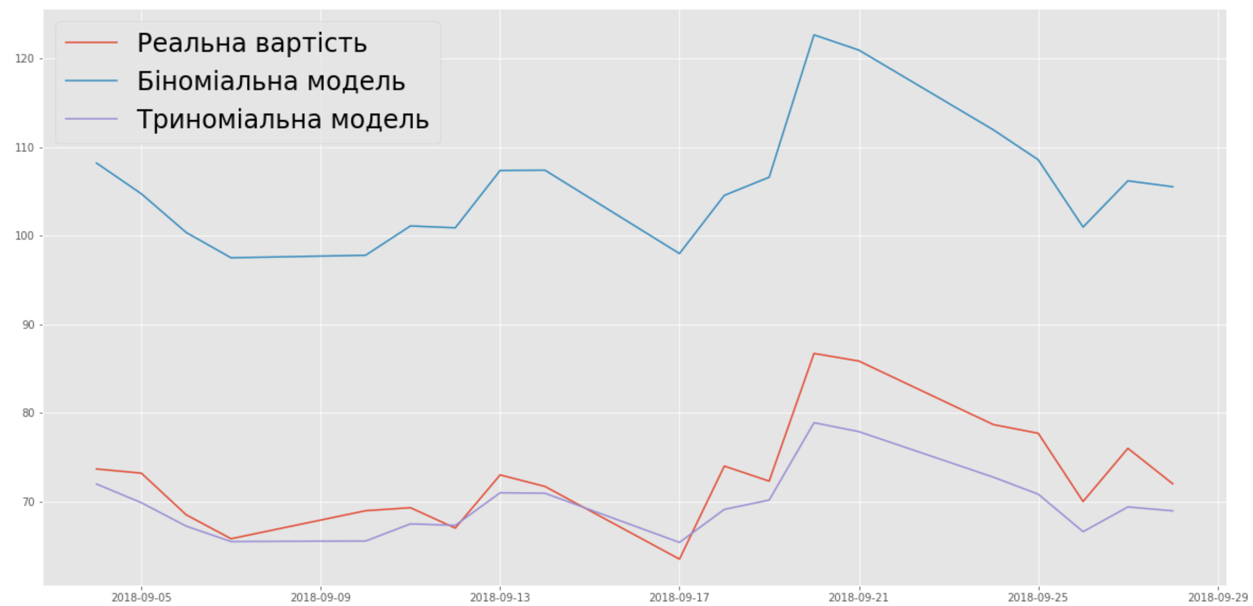


Рисунок 3.3 – Графік результатів біноміальної та триноміальної моделей

Як видно, з результатів у таблиці та графіку, триноміальна модель показала значно кращий результат навіть з меншою кількістю кроків. В даному випадку це пояснюється тим, що у триноміальній моделі додатково розглядається ймовірність відсутності зміни вартості базового активу, що призводить до зниження загальної ймовірності росту, що у свою чергу призводить до зменшення вартості відповідного опціону, тобто ближчому до реальної вартості.

Описані міркування щодо «успіху» триноміальної моделі у порівнянні з біноміальною можна провести й у випадку, якщо оцінена за допомогою біноміальної моделі вартість опціону виявиться нижчою за реальну. У такому випадку триноміальна модель також покаже кращий результат, адже у ній ймовірність падіння ціни активу буде нижчою, ніж у біноміальній, що призведе до збільшення розрахованої теоретичної вартості опціону у порівняння з біноміальною.

У таблиці 3.5 наведено значення середньої абсолютної похибки для моделей, що розглядаються. Вони показують, що для даної вибірки оцінки, отримані за допомогою триноміальної моделі на порядок точніші, ніж отримані за допомогою біноміальної.

Таблиця 3.5 – Середні абсолютні похибки біноміальної та триноміальної моделі з 4 та 2 кроками відповідно

Метод	Біноміальна модель з 4 кроками	Триноміальна модель з 2 кроками
MAPE	0,4514	0,0453

3.3 Фактична реалізація комбінованого методу

Для реалізації комбінованого методу необхідно оцінити параметр α регресійної моделі (2.4) за k кроків:

$$\alpha C_{B_i} + (1-\alpha) C_{T_i} = C_{R_i}$$

де C_{B_i} – вартість опціону, оцінена за моделлю Блека-Шоулза,

C_{T_i} – ватість опціону, оцінена за триноміальною моделлю,

C_{R_i} – реальна вартість опціону на i-му кроці.

Розв'яжемо задачу методом найменших квадратів, тобто знайдемо параметр α як розв'язок задачі оптимізації (3.3).

$$\sum_{i=1}^{k}\left(C_{R_i} - \alpha C_{B_i} - (1-\alpha)C_{T_i}\right)^2 \to \min \tag{3.3}$$

Програмно поставлена задача мінімізації була розв'язана методом градієнтного спуску з початковою точною 1.

Отримавши значення параметру α можна розраховувати оцінку вартості опціону як середньозважене значення оцінок триноміальної моделі та моделі Блека-Шоулза, тобто:

$$C_K = \alpha C_B + (1-\alpha)C_T$$

3.4 Використання комбінованого методу

За результатами роботи програми для комбінованого методу з одним кроком регресії отримали значення параметра α = 0.0405. Невелике значення параметра α у порівнянні з 1-α свідчить про те, що значення отримані за допомогою моделі Блека-Шоулза матимуть незначний вплив на результат комбінованої моделі. Це є логічним, адже точність триноміальної моделі значно вища, ніж моделі Блека-Шоулза.

Провівши розрахунок оцінки вартості опціону за допомогою комбінованого методу (триноміальна модель взята з кроком 2) отримали результати, що відображені у таблиці 3.6.

Таблиця 3.6 – Порівняння результатів комбінованого методу з попередніми результатами

№	Ціна опціону, $	Результат моделі Блека-Шоулза, $	Результат триноміальної моделі з 2 кроками, $	Результат комбінованої моделі з 1 кроком регресії, $
1	73.67	113.88	71.97	-
2	73.20	108.95	69.86	71.45
3	68.50	102.82	67.22	68.66
4	65.80	98.98	65.48	66.84
5	68.96	99.00	65.54	66.93
6	69.30	105.02	67.47	69.00
7	67.00	104.95	67.31	68.84
8	73.00	112.64	70.99	72.67
9	71.70	112.49	70.94	72.62
10	63.50	101.88	65.38	66.86
11	74.00	109.65	69.11	70.75
12	72.30	111.04	70.16	71.82
13	86.71	123.60	78.89	80.71
14	85.85	122.06	77.88	79.67
15	78.68	114.38	72.75	74.43
16	77.70	111.57	70.83	72.48
17	70.00	105.52	66.59	68.17
18	76.00	109.37	69.38	71.00
19	72.00	108.68	68.95	70.56

З результатів роботи методу видно, що він дає значне покращення у порівнянні з моделлю Блека-Шоулза, проте зростання точності о порівнянні з триноміальною моделлю не настільки значне в силу високої точності триноміальної моделі.

Значення середньої абсолютної похибки (MAPE) для комбінованої моделі становить 0,0332 (таблиця 3.7), що на 26% краще у порівнянні з триоміальною моделлю та 93% краще у порівнянні з моделлю Блека-Шоулза. На рисунку 3.4 зображено графіки результатів відповідних моделей.

Таблиця 3.7 – Середні абсолютні похибки моделі Блека-Шоулза, триноміальної з двома кроками та комбінованої

Метод	Блека-Шоулза	Триноміальний з 2 кроками	Комбінований
MAPE	0,4999	0,0453	0,0332

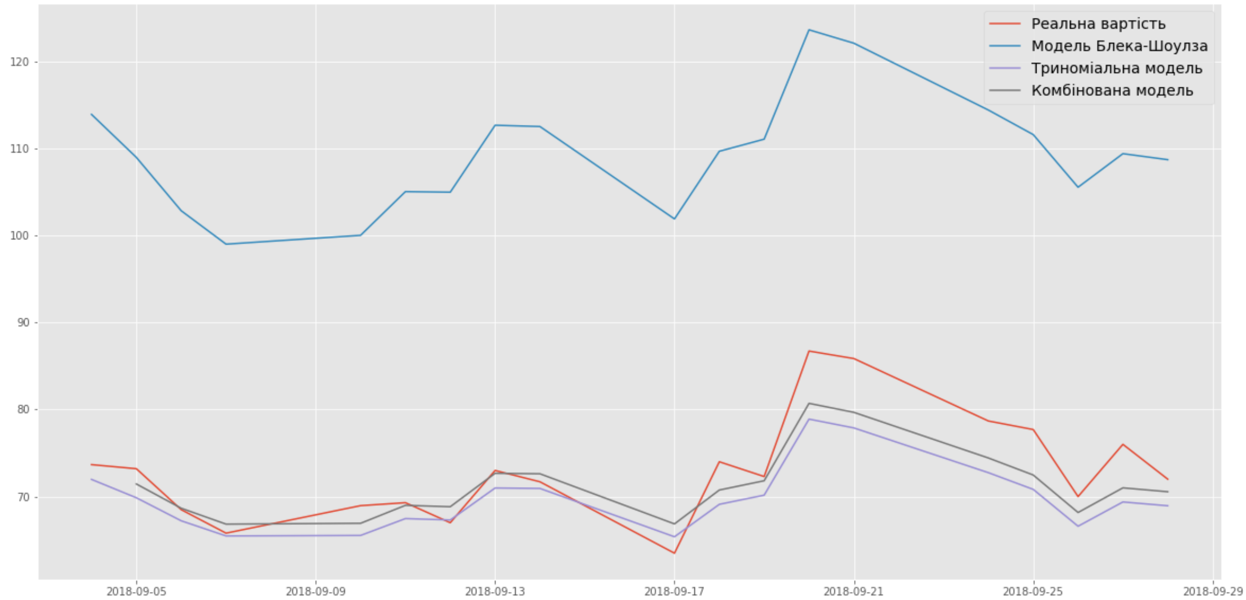


Рисунок 3.4 – Графік результатів комбінованої моделі у порівнянні з триноміальною та моделлю Блека-Шоулза

Очевидними недоліками комбінованої моделі є складність та об'єм розрахунків у порівняння з іншими розглянутими моделями та неможливість оцінити вартість опціону відразу через необхідність розрахунку параметру регресії.

3.4 Висновки до розділу

У розділі було розв'язано задачу розрахунку теоретичної вартості опціону наступними моделями: біноміальна, триноміальна, Блека-Шоулза та комбінована. На основі отриманих результатів проведений порівняльний аналіз описаних моделей щодо точності оцінки у порівняння з реальною вартістю опціону.

Було встановлено, що при збільшенні кількості кроків біноміальної моделі, значення оцінки прямують до значень оцінки формулою Блека-Шоулза, проте в деяких випадках біноміальна модель дає більш точну оцінку при правильно підібраній кількості кроків.

На прикладі розв'язаної задачі було продемонстровано твердження пункту 2.2 щодо точності триноміальної моделі у порівнянні з біноміальною. Результати оцінки вартості опціону за допомогою триноміальної модель з 2 кроками показали кращий результат у порівнянні з біноміальною моделлю з кроками 1, 2, 3 та 4.

Також у розділі була реалізована комбінована модель, яка оцінює вартість опціону як середньозважене значення моделі Блека-Шоулза та триноміальної моделі з двома кроками. Як і очікувалось, комбінована модель мала найвищу точність оцінки у порівнянні з усіма іншими моделями, проте її недоліки можуть унеможливити її використання при відсутності попередніх даних.

РОЗДІЛ 4

ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСТНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

4.1 Постановка задачі

Створення програмного продукту, що буде реалізовувати моделі оцінки теоретичної вартості опціону. Мають бути реалізовані наступні моделі: біноміальна, триноміальна, Блека-Шоулза та комбінована.

Результати роботи моделей повинні відображатися у вигляді таблиць та графіків динаміки вартості опціону.

4.2 Обґрунтування функцій та параметрів програмного продукту

Головна функція F_0 – розробка програмного продукту, який дає найменшу похибку при порівняння реальних значень цільової змінної та результуючого значення побудованого багаточлену, у відповідній точці. Виходячи з конкретної мети, можна виділити наступні основні функції програмного продукту, кожна з яких функцій може мати декілька варіантів реалізації.

Морфологічна карта функцій зображена на рисунку 4.1, а позитивно-негативна характеристика наведена у таблиці 4.1. Функція F1:а) мова програмування Python; б) мова програмування C#; в) мова програмування Java. Функція F2: а) формат стиснутого рядку; б) формат зубчатої діагоналі. Функція F3: а) за допомогою багаточлену Чебишева; б) за допомогою багаточлену Лежандра; в) за допомогою багаточлену Лаггера; г) за допомогою багаточлену Ерміта. Функція F4: а) застосування методу середнього арифметичного; б) застосування методу через нормовані значення. Функція

F5: а) інтерфейс користувача, створений на базі WinForms; б) інтерфейс користувача, створений на базі PyQT5.

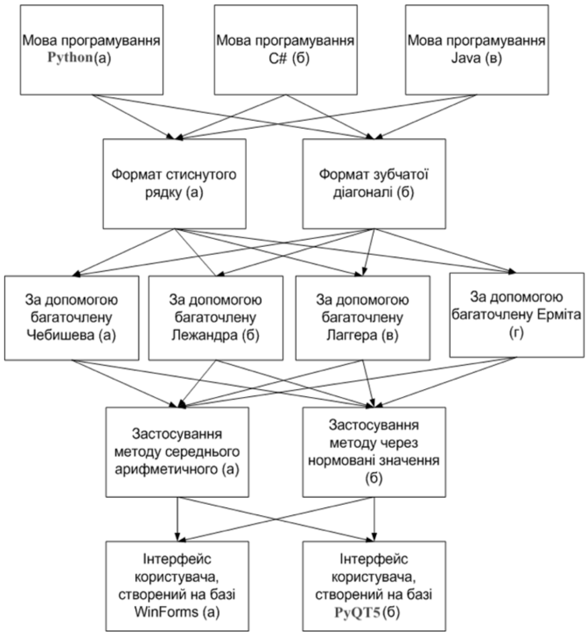


Рисунок 4.1 – Морфологічна карта

Таблиця 4.1 – Позитивно-негативна матриця

Основні функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
F1	а	Швидке написання коду	Довший час виконання коду
	б	Код швидко виконується	Час написання коду
	в	Кросплатформений	Час написання коду
F2	а	Широкопоширений	Складний у створенні
	б	Використовується при паралельних розрахунках	Складний у використанні
F3	а	Висока точність	Складний у використанні
	б	Простий у використанні	Низька точність
	в	Використання у власних ПП	Затрачений час
	г	Алгоритмізований	Менша точність
F4	а	Простота реалізації	Залежність від даних
	б	Більша точність	Складність реалізації

Кінець таблиці 4.1

F5	а	Легкий у створенні	Не кросплатформенний
	б	Проста інтеграція з Python	Не дуже гнучкий

За результатами аналізу позитивно-негативної матриці, будемо використовувати наступні варіанти реалізації програмного продукту:

1. F1(а)=> F2(а)=>F3(а)=>F4(а)=>F5(б);
2. F1(а)=>F2(а)=>F3(а)=>F4(б)=>F5(б);
3. F1(а)=>F2(а)=>F3(г)=>F4(а)=>F5(б);
4. F1(а)=>F2(а)=>F3(г)=>F4(б)=>F5(б).

Для характеристики прототипу програмного додатку використовуємо параметри X1 – X5. Будемо розглядати 3 типи варіантів значення параметрів – таблиця 4.2 з бальною шкалою, що наведена на рисунку 4.2.

Таблиця 4.2 – Основні параметри програмного продукту

Назва параметра	Умовні позначення	Одиниці виміру	Значення параметра		
			Мінімальне	Середнє	Максимальне
Швидкодія мови програмування	X1	Оп/мс	500	1600	2000
Об’єм пам’яті для збереження даних	X2	Мб	32	16	8
Час обробки даних апроксимації	X3	мс	800	420	60
Точність розв’язку	X4	Доля одиниці	10e-4	10e-5	10e-6
Потенційний об’єм програмного коду	X5	Кількість строк	1000	800	600

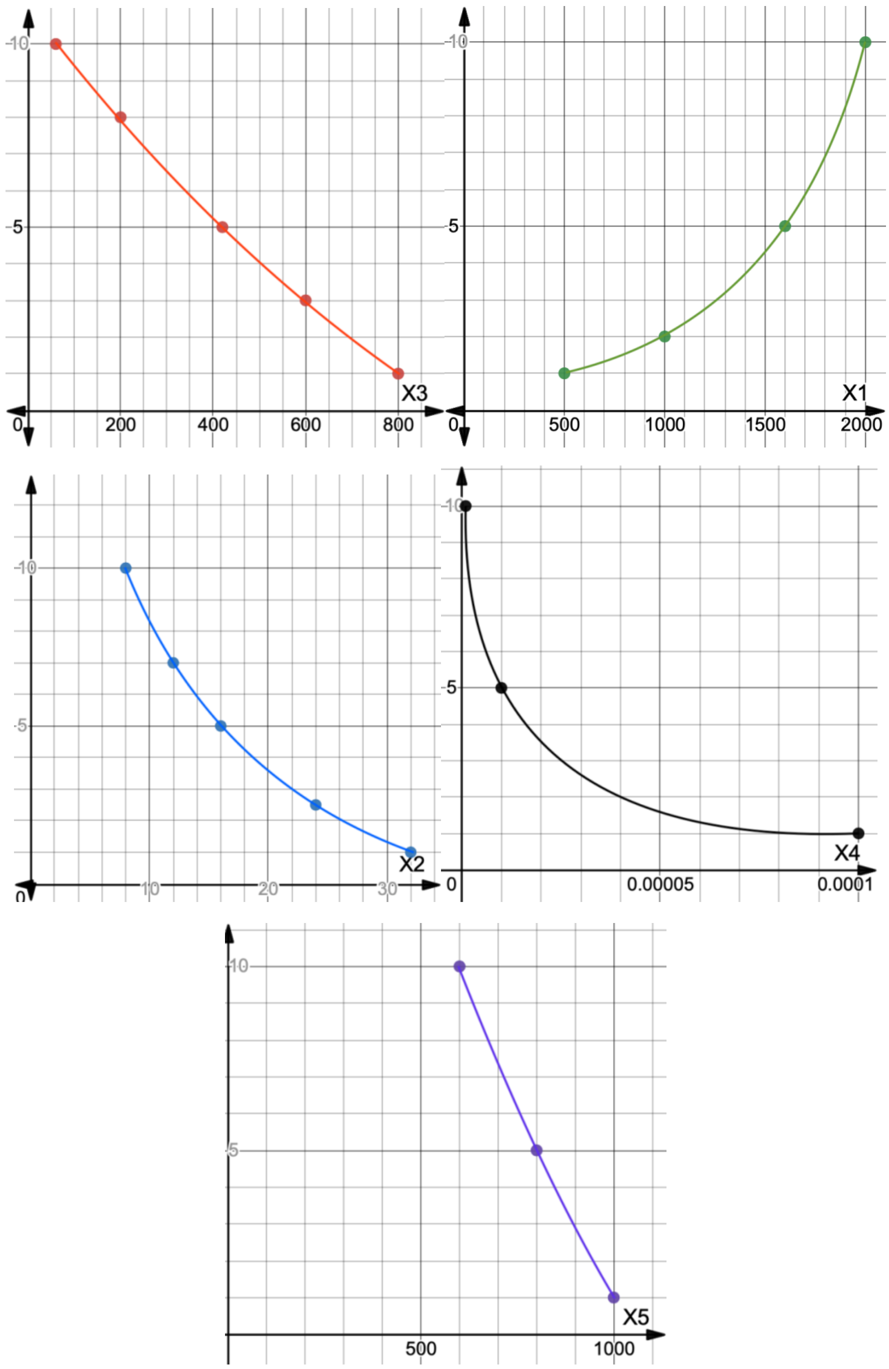


Рисунок 4.2 – Бальна оцінка параметрів

Для визначення ступеню важливості кожного параметру застосовуємо експертне оцінювання. Результати ранжування показників вносяться до таблиці 4.3 .

Таблиця 4.3 – Результати ранжування показників -

Познач. параметра	Ранг параметра за оцінкою експерта							Сума рангів R_i	Відхилення Δ_i	Δ_i^2
	1	2	3	4	5	6	7			
X1	3	2	3	3	2	3	2	18	-3	9
X2	2	3	2	2	3	2	3	17	-4	16
X3	1	1	1	1	1	1	1	7	-14	196
X4	5	4	4	5	4	4	4	30	9	81
X5	4	5	5	4	5	5	5	33	11	121
Разом	15	15	15	15	15	15	15	105	0	423

Порахуємо коефіцієнт узгодженості:

$$W = \frac{12S}{N^2(n^3 - n)} = \frac{12 \cdot 423}{49(125 - 5)} = 0,86 > W_k = 0,67$$

Ранжирування можна вважати достовірним, тому що знайдений коефіцієнт узгодженості перевищує нормативний, котрий дорівнює 0,67.

Скориставшись результатами ранжирування, проведемо попарне порівняння всіх параметрів і результати занесемо у таблицю (таблиці 4.4 та 4.5), вважаючи ранг 1 найбільшим, а ранг 5 найменшим.

Таблиця 4.4 – Результати ранжування параметрів (1 – найвищий ранг, 5 - найнижчий)

Параметри	Експерти							Підсумкова оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X1 та X2	$<$	$>$	$<$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	0,5
X1 та X3	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	0,5
X1 та X4	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	1,5
X1 та X5	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	1,5
X2 та X3	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	0,5

Кінець таблиці 4.4

Парамет ри	Експерти							Підсумкова оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X2 та X4	>	>	>	>	>	>	>	>	1,5
X2 та X5	>	>	>	>	>	>	>	>	1,5
X3 та X4	>	>	>	>	>	>	>	>	1,5
X3 та X5	>	>	>	>	>	>	>	>	1,5
X4 та X5	<	>	>	<	>	>	>	>	1,5

Таблиця 4.5 – Розрахунок вагомості параметрів

Параметри	Параметри					Перша ітер.		Друга ітер.		Третя ітер	
	X1	X2	X3	X4	X5	b_i	$K_{вi}$	b_i^1	$\hat{E}^{1}_{\hat{a}^{з}}$	b_i^2	$\hat{E}^{2}_{\hat{a}^{з}}$
X1	1,0	0,5	0,5	1,5	1,5	5	0,2	22	0,191	100	0,190
X2	1,5	1,0	0,5	1,5	1,5	6	0,24	27,5	0,239	124,75	0,238
X3	1,5	1,5	1,0	1,5	1,5	7	0,28	34	0,296	155,5	0,296
X4	0,5	0,5	0,5	1,0	1,5	4	0,16	17,5	0,152	80,25	0,153
X5	0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	3	0,12	14	0,122	64,5	0,123
Всього:						25	1	115	1	525	1

Як видно з таблиці, різниця значень коефіцієнтів вагомості не перевищує 2%, тому більшої кількості ітерацій не потрібно.

Визначаємо рівень якості кожного варіанту виконання основних функцій окремо (таблиця 4.6).

Таблиця 4.6 – Розрахунок показників рівня якості варіантів реалізації

Основні функції	Варіант реалізації функції	Абсолютне значення параметра –	Бальна оцінка параметра –	Коефіцієнт вагомості параметра	Коефіцієнт рівня якості
F1	а	1500	4,3	0,190	0,817
F2	а	16	5	0,238	1,19
F3	а	800	1	0,296	0,296

Продовження таблиці 4.6

Основні функції	Варіант реалізації функції	Абсолютне значення параметра –	Бальна оцінка параметра –	Коефіцієнт вагомості параметра	Коефіцієнт рівня якості
	г	80	9,5	0,296	2,812
F4	а	10е-4	1	0,153	0,153
	б	10е-6	10	0,153	1,53
F5	б	800	5	0,123	0,615

За цими даними визначаємо рівень якості кожного з варіантів:

$К_{ТЕР1}$ = 0,817+ 1,19+ 0,296+ 0,153+ 0,615= 3,071

$К_{ТЕР2}$ = 0,817 + 1,19 + 0,296 + 1,53 + 0,615= 4,448

$К_{ТЕР3}$ = 0,817 + 1,19+ 2,812 + 0,153 + 0,615= 5,587

$К_{ТЕР4}$ = 0,817 + 1,19 + 2,812 + 1,53 + 0,615= 6,964

Отже, найкращим є четвертий варіант.

4.3 Економічний аналіз варіантів розробки програмного продукту

Для оцінки трудомісткості розробки спочатку проведемо розрахунок трудомісткості. Усі варіанти мають наступні основні завдання:

1) Обробка вхідних даних
2) Розрахунок параметрів моделей
3) Обробка результатів роботи моделей
4) Вивід результатів у вигляді таблиць та графіків

Також кожний з варіантів має додаткове завдання, яке є реалізаціями розгалужених варіантів розробки незалежного модуля. Далі наведено варіанти додаткових завдань:

5.1) Побудова біноміальних дерев зміни вартості акцій

5.2) Побудова триноміальних дерев зміни вартості акцій

6.1) Мінімізація одновимірної функції регресійної моделі

6.2) Мінімізація багатовимірної функції регресійної моделі

В варіанті 1 присутнє додаткове завдання 5.1 В варіанті 2 присутнє додаткове завдання 5.2. В варіанті 3 присутнє додаткове завдання 6.1. В варіанті 4 присутнє додаткове завдання 6.2

За ступенем новизни до групи Б відносяться задання 2, 5.2 та 6.2, до групи В відносяться завдання 1 та 3, до групи Г – завдання 4, 5.1 та 6.1.

За складністю алгоритмів до групи 1 відносяться завдання 2, 5.2, 6.2 до групи 2 відносяться завдання 1, 3, 5.1, 6.1 до групи 3 відноситься завдання 4.

Для першого завдання, виходячи із норм часу для завдань розрахункового характеру степеню новизни В та групи складності алгоритму 2, трудомісткість дорівнює: $T_р$=19 людино - днів. Поправочний коефіцієнт, який враховує вид використаної інформації для першого завдання (банк даних) $К_п$ = 0.6. Поправочний коефіцієнт, який враховує складність контролю вхідної та вихідної інформації для всіх завдань дорівнює 1: $К_{ск}$ = 1. Оскільки при розробці всіх завдань використовуються стандартні модулі, врахуємо це за допомогою коефіцієнта $К_{ст}$ = 0.8. Коефіцієнти $К_м$ і $К_{ст.п}$, які враховують відповідно програмування на мові високого рівня та розробку стандартного програмного забезпечення, для всіх завдань дорівнюють 1:$К_м$ = $К_{ст.п}$= 1. Таким чином, загальна трудомісткість програмування першого завдання дорівнює ($К_{ск}$, $К_м$ та $К_{ст.п}$ можемо не враховувати):

T_1 = 19•0.6•0.8 = 9,12 людино-днів.

Проведемо аналогічні розрахунки для решти завдань:

T_2 = 64•2.02•0.8 = 103,43 людино-днів

T_3 = 19•1.2•0.8 = 18,24 людино-днів

T_4 = 8•0.36•0.8 = 2,3 людино-днів

$T_{5.1}$ = 12•0.72•0.8 = 6,91 людино-днів

$T_{5.2}$ = 64•1.021•0.8 = 52,27 людино-днів

$T_{6.1}$ = 12•0.72•0.8 = 6,91 людино-днів

$T_{6.2}$ = 43•0.81•0.8 = 27,864 людино-днів

Складаємо трудомісткість відповідних завдань для кожного чотирьох обраних варіантів реалізації програми, щоб отримати їх трудомісткість:

T_{I} = (9,12 + 103,43 + 18,24 + 2,3 + 6,91) • 8 = 1120 людино-годин;

T_{II} = (9,12 + 103,43 + 18,24 + 2,3 + 52,27) • 8 = 1482.88 людино-годин;

T_{III} = (9,12 + 103,43 + 18,24 + 2,3 + 6,91) • 8 = 1120 людино-годин;

T_{IV} = (9,12 + 103,43 + 18,24 + 2,3 + 27,86) • 8 = 1287.6 людино-годин.

Отже, варіанти 2 та 4 мають однакову найвищу трудомісткість, а варіанти 1 та 3 – однакову меншу трудомісткість.

В розробці беруть участь два програмісти з окладами 18000грн та 12000грн відповідно та один тестувальник з окладом 10000грн та частковою зайнятістю (0.5). Визначимо середню зарплату за годину:

$$\text{С}_{\text{г}} = \frac{18000 + 12000 + 0.5 \cdot 10000}{3 \cdot 21 \cdot 8} = 69.45\text{грн}$$

Додаткова ЗП становить 30%. Тоді зарплата розробників за варіантами:

I. $C_{зп}$ = 69.45 • 1120 • 1.3 = 101119.2 грн.

II. $C_{зп}$ = 69.45• 1482.88 • 1.3= 133881.82грн.

III. $C_{зп}$ = 69.45• 1120 • 1.3 = = 101119.2 грн.

IV. $C_{зп}$ = 69.45• 1287.6 • 1.3 = 116250,97 грн.

Відрахування на всі види соціального страхування:

I. $C_{от}$ = 101119.2 • 0.22 = 22246.25 грн.

II. $C_{от}$ = 133881.82 • 0.22 = 29454 грн.

III. $C_{от}$ = 101119.2 • 0.22 = 22246.25 грн.

IV. $C_{от}$ = 116250,97 • 0.22 = 25575,21 грн.

Так як ЕОМ обслуговує двох інженерів з окладами 18000грн та 12000грн, з коефіцієнтом зайнятості 0,2 то для однієї машини отримаємо:

$C_{Г}$ = 12 • (18000+12000)• 0,2 = 72000 грн.

З урахуванням додаткової заробітної плати

$C_{ЗП}$ =72000• (1 + 0.3)=93600грн.

Відрахування на всі види соціального страхування:

$C_{OT} = 93600 \bullet 0.22 = 20592$ грн.

Розраховуємо амортизаційні відрахування (при амортизації 25% та вартості двох ЕОМ вартістю 15000 грн.).

$C_A = 1.15 \bullet 0.25 \bullet 15000 \bullet 2 = 8625$ грн.

Витрати на ремонт та профілактику:

$C_P = 1.15 \bullet 30000 \bullet 0.05 = 1725$ грн.

Ефективний годинний фонд часу ПК за рік становить:

$T_р = (Д_к – Д_в – Д_с – Д_р.)\ t_з * n_з * К_в$:

$T_{ЕФ} = (365 – 104 – 8 – 16) \bullet 8 \bullet 0.9 = 1706.4$ годин

Витрати на оплату електроенергії, враховуючи середню потужність кожної ЕОМ рівній0.5КВт становлять:

$C_{ЕЛ} = 1706{,}4 \bullet (0.5+0.5) \bullet 1{,}46255 \bullet 1.2 = 2994{,}8$ грн.

Накладні витрати:

$C_H = 2 \bullet 15000 \bullet 0{,}67 = 20100$ грн.

Тоді, річні експлуатаційні витрати будуть:

$C_{ЕКС} = 93600 + 20592 + 8625 + 1725 + 2994{,}8 + 20100 = 147636{,}8$ грн.

Собівартість однієї машино-години ЕОМ дорівнюватиме:

$C_{М-Г} = C_{екс} / T_{еф} 147636{,}8/1706{,}4 = 86{,}52$ грн/час.

Оскільки в даному випадку всі роботи, які пов’язані з розробкою програмного продукту ведуться на ЕОМ, витрати на оплату машинного часу, в залежності від обраного варіанта реалізації пакету, складає:

I. $C_M = 86{,}52 \bullet 1120 = 96902{,}4$ грн.;

II. $C_M = 86{,}52 \bullet 1482.88 = 123626{,}7$ грн.;

III. $C_M = 86{,}52 \bullet 1120 = 96902{,}4$грн.;

IV. $C_M = 86{,}52 \bullet 1287.6 = 111403{,}15$ грн.

Накладні витрати складають 67% від заробітної плати:

I. $C_H = 101119.2 \bullet 0{,}67 = 67749{,}86$ грн.;

II. C_H = 133881.82 • 0,67 = 89700,82 грн.;

III. C_H = 101119.2 • 0,67 = 67749,86грн.;

IV. C_H = 116250,97 • 0,67 = 77888.15 грн..

Визначимо вартість розробки програмного продукту за варіантами (46):

I. $C_{ПП}$ = 101119.2 + 22246.25 + 96902,4+ 67749,86= 288017,71 грн.;

II. $C_{ПП}$ = 133881.82 + 29454+ 123626,7+ 89700,82= 376663,34 грн.;

III. $C_{ПП}$ = 101119.2 + 22246.25 + 96902,4+ 67749,86= 288017,71грн.;

IV. $C_{ПП}$ = 116250,97 + 25575,21 + 111403,15+ 77888.15 = 331117.48 грн..

4.3.1 Розрахунок показників економічної ефективності

Для кожного варіанта реалізації функцій ПП коефіцієнт техніко-економічного рівня розраховується за формулою K_{TEPj}= K_{TPj} /$C_{ПП}$.

K_{TEP1} = 3.071/288017,71= 1.07e-05;

K_{TEP2} = 4.448/376663,34= 1,18e-05;

K_{TEP3}= 5.587/288017,71= 1,94e-05;

K_{TEP4} = 6.964/331117.48 = 2.103e-05.

Таким чином, найбільш ефективним єтретій варіант реалізації функцій ПП–застосування методу середнього арифметичного; інтерфейс користувача на базі PyQT5.

4.4 Висновки до розділу

В результаті виконання економічного розділу були систематизовані і закріплені теоретичні знання в галузі економіки та організації виробництва використанням їх для техніко-економічного обґрунтування розробки методом функціонально-вартісного аналізу.

На основі даних про зміст основних функцій, які повинен реалізувати програмний продукт, були визначені чотири найбільш перспективні варіанти реалізації продукту. Найбільш ефективним виявився перший варіант як простіший для реалізації і достатньо досконалий.

При такому варіанті виконання ПП він матиме достатню універсальність і легкість модифікації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ю-Д. Люу. Методы и алгоритмы финансовой математики. Пер. с англ. С. В. Жуленёва под ред. Е. В. Чепурина. Москва : БИНОМ. Лаб. знаний, 2010, 751 с
2. Дж. К. Халл. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. 6-е изд.: Пер. с англ. М.: ООО «ИД Вильямс», 2007, 1056 с.
3. Hooper Joseph. Covered calls — A wealth option: a guide for generating extraordinary monthly income. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2006, 229 p.
4. Нужденов А.Д. Современные методы оценки реальных опционов в оценке бизнеса. Журнал «Аудит и финансовый анализ», М.: ООО Издательство «ДСМ Пресс», №5, 2005, с. 129-133.
5. Louis Bachelier. Theory of Speculation. MIT Press, Cambridge MA, 1964, 1778p.
6. F. Black. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 81, pp. 637–654.
7. Терри Дж. Количественные методы в финансах. Пер. с анг. – проф. Еримова М.Р., М. «Финансы», 1999, 577 с.
8. Boyle P. Option Valuation Using a Three-Jump Process. International Options Journal 3, 1986, pp. 7-12.
9. Портфельне інвестування : навч. посібник. К.: КНЕУ, 2004, 408 с.
10. Міжнародні розрахунки та валютні операції: навч. посібник. К.: КНЕУ, 2002, 392 с.
11. Фельдман А.Б. Производные финансовые и товарные инструменты. Экономика. Высшее образование, 2008, 472 с.

12. Boness A. Elements of a Theory of Stock-Option Value. Journal of Political Economy, 72, 1964, pp. 163–175.
13. Feldman A. The art of managing your stock options. MONEY, 2001, №1, p. 94-101.
14. Економіка та організація виробництва «Рекомендації до виконання економіко-організаційного розділу дипломних робіт для студентів всіх технічних спеціальностей» [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. всіх технічних спеціальностей / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.М. Крейдич. Н.В. Семенченко, Н.В. Рощина, Л.С. Борданова, Н.Ю. Ренська-Скребньова. – Електронні текстові данні (1 файл: Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 81 с.

ДОДАТОК А
ЛІСТИНГ ПРОГРАМИ

```
import pandas as pd
import numpy as np
from PyQt5.uic.properties import QtCore
from matplotlib.backends.backend_qt5agg import FigureCanvasQTAgg
from matplotlib.figure import Figure

pd.options.display.max_columns = 999
pd.options.display.max_rows = 300
import sys

from PyQt5.QtWidgets import QVBoxLayout, QHBoxLayout, QLineEdit,
QCheckBox, QHeaderView, QTableWidget, QWidget, QGridLayout,
QPushButton, QLabel, QSpinBox, QTabWidget, \
    QApplication, QTextBrowser, QDoubleSpinBox, QTableView, QFrame,
QListWidget, QComboBox, QTableWidgetItem
from PyQt5.QtCore import Qt, QAbstractTableModel, QVariant
from PyQt5.QtCore import pyqtSlot

from pyqtgraph import PlotWidget, plot
import pyqtgraph as pg

import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams["figure.figsize"] = (20.,10.)
plt.style.use('ggplot')

from datetime import datetime
```

```
from math import log, sqrt, exp
from scipy import stats
from scipy.optimize import minimize

data = pd.read_csv("SPX_20180904_to_20180928.csv")
data.sort_values(by="QuoteDate")
data1=data[data.OptionType=="call"]
#print(data1.Strike.value_counts(bins=4000))
data2=data1[data1.Strike==2900]

my_data1=data2[data2.Expiration=="12/21/2018"]
my_data = my_data1[['DNID', 'UnderlyingSymbol', 'UnderlyingPrice',
'OptionSymbol', 'OptionType', 'Expiration', 'QuoteDate', 'Strike', 'LastPrice']]
my_data.QuoteDate = pd.to_datetime(my_data.QuoteDate)
my_data.Expiration = pd.to_datetime(my_data.Expiration)
my_data.index = np.arange(len(my_data))
my_data.to_csv('my_data.csv')


def bsm_call_value(S0, K, T, r, sigma):
    """ Стоимость Европейского опциона call по модели BSM.
    Аналитическая формула.
    Параметры
    ==========
    S0 : float
        текущая цена актива
    K : float
        цена страйка
    T : float
```

```
        время до истечения (в частях года)
    r : float
        ставка без риска
    sigma : float
        фактор волатильности
    Возвращает
    =======
    value : float
        Текущая оценка стоимости Европейского call опциона
    """
    #S0 = float(S0)
    d1 = (log(S0 / K) + (r + 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * sqrt(T))
    d2 = (log(S0 / K) + (r - 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * sqrt(T))
    value = (S0 * stats.norm.cdf(d1, 0.0, 1.0) - K * exp(-r * T) * stats.norm.cdf(d2,
0.0, 1.0))
    return value

def binom_model(N, S0, X, T, r, sigma):
    S = [0] * (N+1)
    for i in range(N+1):
        S[i] = [0] * (N+1)
    S[0][0]=S0
    dT = T/N
    u = exp(sigma * sqrt (dT))
    d = 1/u
    #print (u)
    #print(d)
    for j in range(1, N+1):
        for i in range(j+1):
```

```
            S[i][j] = S0 * u**(j-i) * d**(i)

    #print("BINOM SSSSS")
    #print(S)
    C = [0] * (N+1)
    for i in range(N+1):
        C[i] = [0] * (N+1)

    for i in range (N+1):
        for j in range(N+1):
            C[i][j] = max(S[i][j]-X, 0)



    pu = (exp(r * dT) - d) / (u - d)
    pd = 1 - pu

    for j in range(N-1, -1, -1):
        for i in range(j+1):
            C[i][j] = exp(-r*dT)*(pu * C[i][j+1] + pd * C[i+1][j+1])



    #print("BINOM CCCCCC")
    #print(C)
    return C[0][0]

def trinom_model(N, S0, X, T, r, sigma):
    S = [0] * (2*N+1)
    for i in range(2*N+1):
        S[i] = [0] * (N+1)
```

```
S[0][0]=S0
t = T/N
u = exp(sigma * sqrt (2*t))
d = 1/u
#print (u)
#print(d)
for j in range(1, N+1):
    for i in range(j+1):
        if(i == j):
            S[i][j] = S0
        if(j>i):
            S[i][j] = S0 * u**(j-i)
        if(i>j):
            S[i][j] = S0 * d**(i-j)

#print("TRINOM SSSSS")
#print(S)
C = [0] * (2*N+1)
for i in range(2*N+1) :
    C[i] = [0] * (N+1)

for i in range (N+1):
    for j in range(N+1):
        C[i][j] = max(S[i][j]-X, 0)

p = ( ( exp( r*t/2 ) - exp( -sigma*sqrt(t/2) ) ) / ( exp( sigma*sqrt(t/2) ) - exp( -
sigma*sqrt(t/2) ) ) )
pu = p**2
pd = (1-p)**2
```

```
    pm = 2*p*(1-p)

    for j in range(N-1, -1, -1):
        for i in range(j+1):
            C[i][j] = exp(-r*t)*(pu * C[i][j+1] + pd * C[i+1][j+1] + pm * C[i+2][j+1])

    #print("TRINOM CCCCCC")
    #print(C)
    return C[0][0]



call_black = np.vectorize(bsm_call_value)
call_binom = np.vectorize(binom_model)
call_trinom = np.vectorize(trinom_model)

def error_MAPE(real, model):
    return sum(abs(real - model)/real)/len(real)

real = my_data.LastPrice
bsm = call_black(np.array(my_data.UnderlyingPrice), np.array(my_data.Strike),
np.array((my_data.Expiration-
my_data.QuoteDate)).astype('timedelta64[D]').astype(np.float)/365, 0.025,
data.UnderlyingPrice.std()/100)
binom = call_binom(4, np.array(my_data.UnderlyingPrice),
np.array(my_data.Strike), np.array((my_data.Expiration-
my_data.QuoteDate)).astype('timedelta64[D]').astype(np.float)/365, 0.025,
data.UnderlyingPrice.std()/100)
trinom = call_trinom(2, np.array(my_data.UnderlyingPrice),
np.array(my_data.Strike), np.array((my_data.Expiration-
```

```
my_data.QuoteDate)).astype('timedelta64[D]').astype(np.float)/365, 0.025,
data.UnderlyingPrice.std()/100)
def combine(k):

    def fun(x):
        return sum((real[:k] - x*bsm[:k] - (1-x)*trinom[:k])**2)
    alpha = minimize(fun, 1).x[0]
    #print(alpha)
    return alpha*bsm + (1-alpha)*trinom

comb = combine(1)
errors = {
    "Модель Блека-Шоулза" : error_MAPE(real, bsm),
    "Біноміальна модель" : error_MAPE(real, binom),
    "Триноміальна модель" : error_MAPE(real, trinom),
    "Комбінована модель" : error_MAPE(real[1:], comb[1:])
}
results = {
    "Реальна варість": my_data.LastPrice,
    "Модель Блека-Шоулза" : bsm,
    "Біноміальна модель" : binom,
    "Триноміальна модель": trinom,
    "Комбінована модель" : comb
}
results = pd.DataFrame(results)

def get_model(model, N=2):

    if model == "bsm":
```

```
        return call_black(np.array(my_data.UnderlyingPrice),
np.array(my_data.Strike),
                          np.array((my_data.Expiration -
my_data.QuoteDate)).astype('timedelta64[D]').astype(
                             np.float) / 365, 0.025, data.UnderlyingPrice.std() / 100)

    elif model == "binom":
        return call_binom(N, np.array(my_data.UnderlyingPrice),
np.array(my_data.Strike), np.array((my_data.Expiration-
my_data.QuoteDate)).astype('timedelta64[D]').astype(np.float)/365, 0.025,
data.UnderlyingPrice.std()/100)

    elif model == "trinom":
        return call_trinom(N, np.array(my_data.UnderlyingPrice),
np.array(my_data.Strike), np.array((my_data.Expiration-
my_data.QuoteDate)).astype('timedelta64[D]').astype(np.float)/365, 0.025,
data.UnderlyingPrice.std()/100)

    elif model == "comb":
        return combine(1)

    return




class MplCanvas(FigureCanvasQTAgg):

    def __init__(self, parent=None, width=5, height=4, dpi=100):
```

```
        fig = Figure(figsize=(width, height), dpi=dpi)
        self.axes = fig.add_subplot(111)
        super(MplCanvas, self).__init__(fig)

class MainWindow(QWidget):

    def __init__(self):
        super().__init__()
        self.initUI()

    def initUI(self):
        self.setGeometry(0, 0, 1500, 1000)
        central_widget = QWidget(self)
        #self.setCentralWidget(central_widget)
        self.grid_layout = QGridLayout()
        central_widget.setLayout(self.grid_layout)

#Tabel
        table = QTableWidget(self)
        table.setColumnCount(my_data.shape[1])
        #table.setRowCount(my_data.shape[1])
        table.setHorizontalHeaderLabels(list(my_data.columns))
        for i, row in my_data.iterrows():
            table.setRowCount(table.rowCount() + 1)

            for j in range(table.columnCount()):
                table.setItem(i, j, QTableWidgetItem(str(row[j])))
        table.resizeColumnsToContents()
        table.setMinimumSize(900, 400)
```

```
        self.grid_layout.addWidget(table, 1, 0)

    #Graph
        self.plot = MplCanvas(self, width=10, height=4, dpi=100)
        self.plot.axes.plot(my_data.QuoteDate, real, label='Реальна вартість')
        self.plot.axes.legend()
        self.grid_layout.addWidget(self.plot, 2, 0)

    #Methods

        self.method_binom = QCheckBox()
        self.method_trinom = QCheckBox()
        self.method_BS = QCheckBox()
        self.method_comb = QCheckBox()
        self.steps_box_binom = QLineEdit()
        self.steps_box_trinom = QLineEdit()
        self.method_binom.setText("Біноміальна модель")
        self.method_trinom.setText("Триноміальна модель")
        self.method_BS.setText("Модель Блека-Шоулза")
        self.method_comb.setText("Комбінована модель")

        self.steps_box_binom.setText("4")
        self.steps_box_binom.resize(10,10)
        self.steps_box_trinom.setText("2")
        self.steps_box_trinom.resize(10,10)

        plot_button = QPushButton()
        plot_button.setText("Розрахувати")
        plot_button.clicked.connect(self.calc_button_press)
```

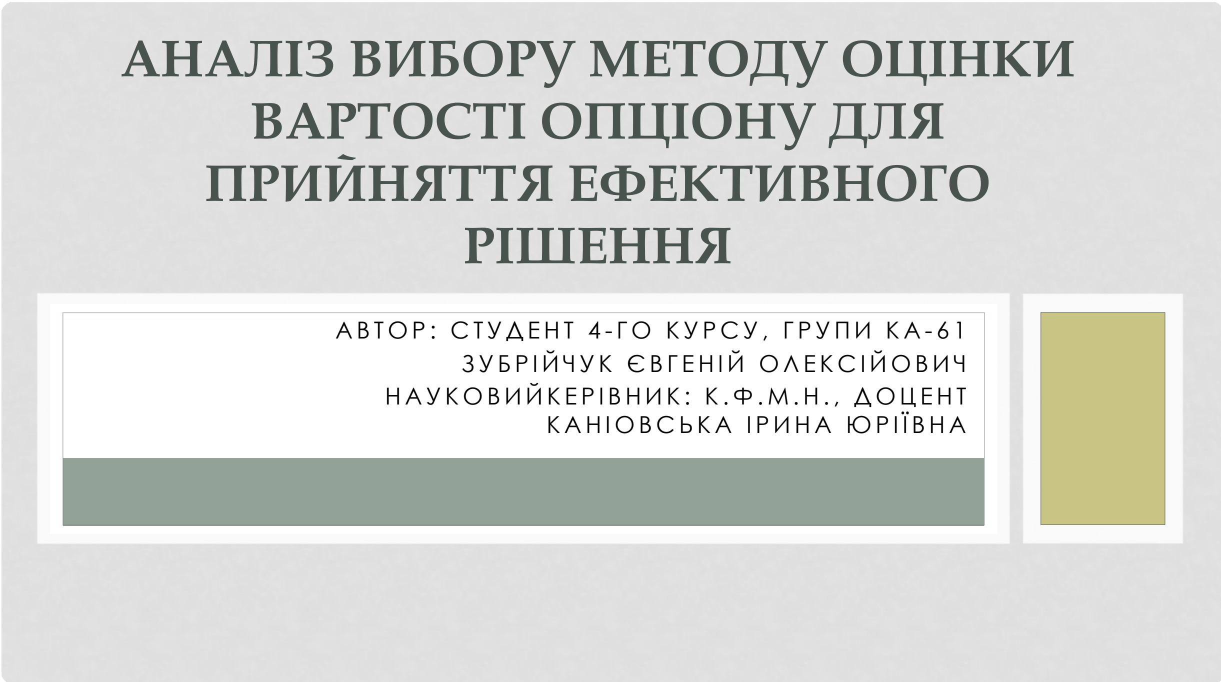
```
        boxH1 = QHBoxLayout()
        boxH1.addWidget(self.method_binom)
        boxH1.addWidget(self.steps_box_binom)

        boxH2 = QHBoxLayout()
        boxH2.addWidget(self.method_trinom)
        boxH2.addWidget(self.steps_box_trinom)

        boxV = QVBoxLayout()
        boxV.addWidget(self.method_BS)
        boxV.addWidget(self.method_comb)

        boxV.addLayout(boxH1)
        boxV.addLayout(boxH2)
        boxV.addWidget(plot_button)

        self.grid_layout.addLayout(boxV, 1, 1)

#Calculation

    @pyqtSlot()
    def calc_button_press(self):

        self.plot.axes.clear()
        self.plot.axes.plot(my_data.QuoteDate, real, label='Реальна вартість')

        if self.method_BS.isChecked():
```

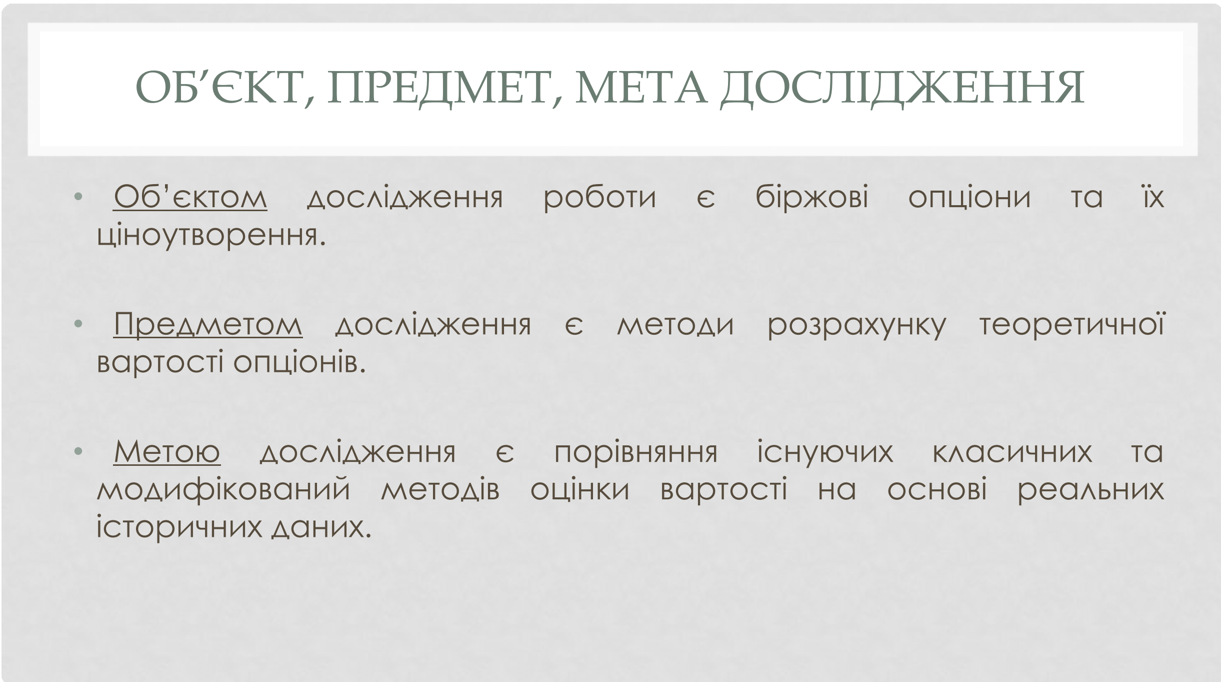
```
            bsm = get_model("bsm")
            self.plot.axes.plot(my_data.QuoteDate, bsm, label='Модель Блека-
Шоулза')

        if self.method_binom.isChecked():
            binom = get_model("binom", int(self.steps_box_binom.text()))
            self.plot.axes.plot(my_data.QuoteDate, binom, label='Біноміальна
модель')

        if self.method_trinom.isChecked():
            trinom = get_model("trinom", int(self.steps_box_trinom.text()))
            self.plot.axes.plot(my_data.QuoteDate, trinom, label='Триноміальна
модель')

        if self.method_comb.isChecked():
            comb = get_model("comb")
            self.plot.axes.plot(my_data.QuoteDate, comb, label='Комбінована
модель')


        self.plot.axes.legend()
        self.plot.draw_idle()



if __name__ == '__main__':
    app = QApplication(sys.argv)
    mw = MainWindow()
```

```
mw.show()
sys.exit(app.exec_())
```

ДОДАТОК Б

ІЛЮСТРАТИВНИЙ МАТЕРІАЛ ДОПОВІДІ





ОЗНАЧЕННЯ ОПЦІОНУ

- **<u>Опціоном</u>** (або опціонним контрактом) називають цінний папір, що дає власнику <u>право</u> (опцію) продати або придбати деякий базовий актив продавцю (у продавця) опціону. Натомість, сторона, яка продала (виписала) опціон <u>зобов'язана</u> виконати умову, тобто купити або продати базовий актив згідно з опціонним контрактом.

ЯКІ ІСНУЮТЬ ОПЦІОНИ?

- Пут (put)
- Колл (call)

- Американські
- Європейські

- Реальні опціони
- Опціони на індексі
- Опціони на акції
- Опціони на ф'ючерси

ФОРМУВАННЯ ВАРТОСТІ

- Поточна вартість базового активу.
- Страйк опціонного контракту.
- Період експірації опціонного контракту.
- Волатильність ринку базового активу.
- Безризикова процентна ставка.
- Дивідендні виплати під час терміну дії опціонного контракту (лише для опціонів, базовим активом якого є дивідендні акції).

Залежність вартості опціону від ціни страйку

Ціна страйку (€)	115.00	130.00	145.00
Ціна опціону колл (€)	11.91	4.81	1.48
Ціна опціону пут (€)	8.11	16.23	27.79

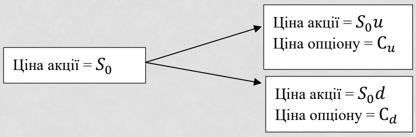
Залежність вартості опціону від періоду експірації

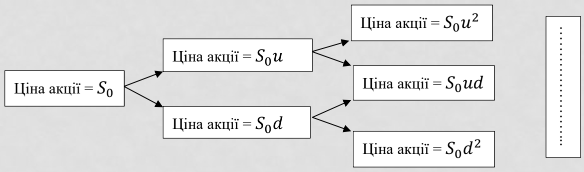
Період експірації	Червень 2020р.	Липень 2020р.	Вересень 2020р.
Ціна опціону колл (€)	7.19	9.09	11.70
Ціна опціону пут (€)	7.94	10.29	13.80

БІНОМІАЛЬНА МОДЕЛЬ: ІДЕЯ

- На кожному дискретному кроці по часу ціна активу може збільшиться з певною ймовірністю – позначимо цю ймовірність p $(0 < p < 1)$, або зменшиться – з ймовірністю q, $(q = 1 - p)$
- Нехай за період експірації опціону вартість акцій може вирости до S_0u $(u > 1)$, або впасти до S_0d $(d < 1)$
- У наслідок зміни ціни акції вартість опціону колл також зміниться та буде складати C_u або C_d відповідно

БІНОМІАЛЬНА МОДЕЛЬ





$$C = e^{-rT}\left(p \max(Su - X, 0) + (1-p)\max(Sd - X, 0)\right)$$

$$C = e^{-rtN} \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j} \max\left(Su^j d^{N-j} - X, 0\right)$$

ТРИНОМІАЛЬНА МОДЕЬ

- $S_{j+1} = S_j u$, де $u = e^{\sigma\sqrt{(2t)}}$ — ріст акцій
- $S_{j+1} = S_j d$, де $d = e^{-\sigma\sqrt{(2t)}}$ — падіння акцій
- $S_{j+1} = S_j$

$$P_u = \frac{e^{\frac{(r-q)t}{2}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}}\right)^2}$$

$$P_d = \frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}} - e^{\frac{(r-q)t}{2}}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{2}}}\right)^2},$$

$$P_m = 1 - P_u - P_d$$

$$C = \frac{P_u C_u + P_m C_m + P_d C_d}{e^{rt}}$$

МОДЕЛЬ БЛЕКА-ШОУЛЗА: ПРУПИЩЕННЯ

- Вартість активу змінюється згідно з законом:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

де S_t – ціна акції у момент *t*, S_0 – початкова ціна акції, μ – параметр тренду ціни, σ – волатильність, W_t – броунівський рух.

- Опціон є європейського типу, тобто виконаний можу бути лише у момент експірації.
- Є можливість інвестування за безризиковою ставкою *r*, яка є незмінною та відомою заздалегідь.
- Відсутня можливість арбітражу, тобто ринок є ефективним. Аналогічне припущення було і в біноміальній моделі.
- Відсутні транзакційні витрати, тобто комісій за проведення операцій.
- Дивідендні виплати не сплачуються за час дії опціонного контракту.

МОДЕЛЬ БЛЕКА-ШОУЛЗА: ФОРМУЛА

$$\mathrm{C} = S_0 N(d_1) - XN(d_2)e^{-rT}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

N(t) – функція нормального розподілу

КОМБІНОВАНА МОДЕЛЬ

C_R – фактична вартість опціону,
C_B – вартість, оцінена за допомогою моделі Блека-Шуолза
C_T – вартість, оцінена за допомогою триноміальної моделі

$$\begin{cases} C_R < C_B < C_T \\ C_R < C_T < C_B \end{cases} \quad \begin{matrix} C_B < C_T < C_R \\ C_B < C_R < C_T \end{matrix} \quad \begin{matrix} C_T < C_R < C_B \\ C_T < C_B < C_R \end{matrix}$$

$$\alpha C_B + (1-\alpha)C_T = C_R => \alpha$$

$$\downarrow$$

$$C_K = \alpha C_B + (1-\alpha)C_T$$

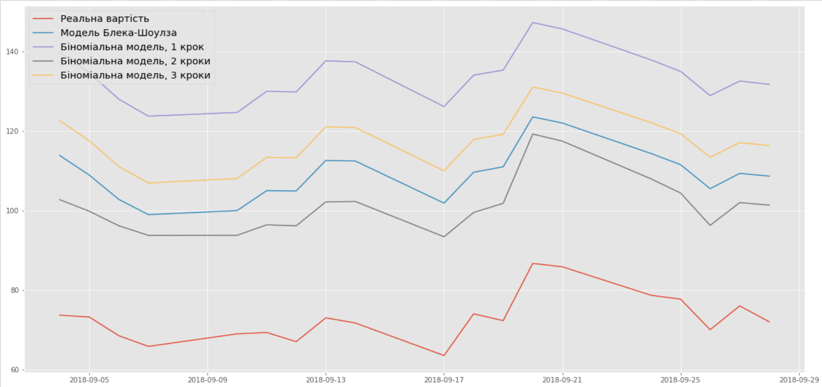
ВХІДНІ ДАНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Індекс S&P 500 (Standard & Poor's 500) – один з найпоширеніших індексів фондового ринку США, що складається з акцій 500 компаній, які мають велику капіталізацію та представляють провідну історію економіки США.

Період: 2018-09-04 - 2018-09-28
Дата експірації: 21.12.2018
$\sigma = 0.17$
$r = 0.025$

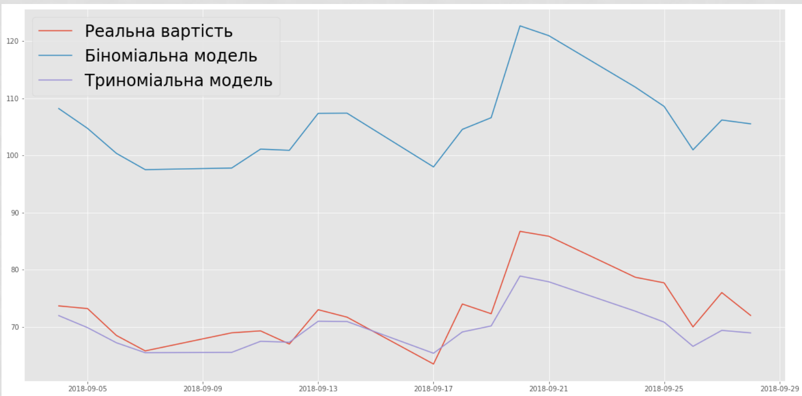
Динаміка зміни індексу S&P 500 за період 2018-01 - 2020-05

БІНОМІАЛЬНА МОДЕЛЬ VS БЛЕКА-ШОУЛЗА



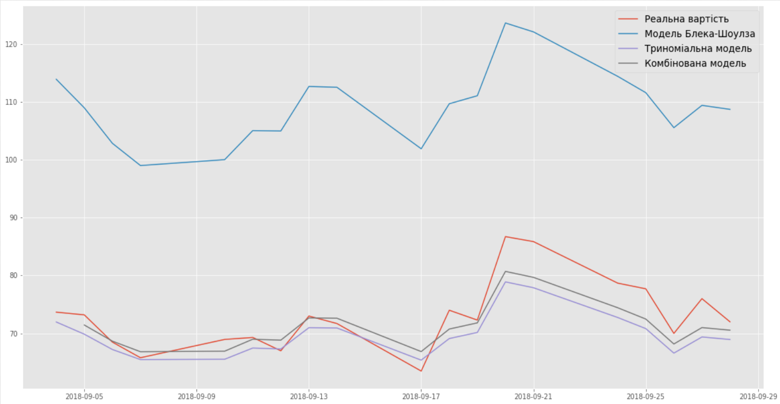
Метод	Блека-Шоулза	Біноміальний з 1 кроком	Біноміальний з 2 кроками	Біноміальний з 3 кроками
MAPE	0,4999	0,8367	0,3902	0,6118

БІНОМІАЛЬНА VS ТРИНОМІАЛЬНА



Метод	Біноміальна модель з 4 кроками	Триноміальна модель з 2 кроками
MAPE	0,4514	0,0453

КОМБІНОВАНА МОДЕЛЬ



Параметр регресії

$\boxed{\alpha = 0.0405}$

Метод	Блека-Шоулза	Триноміальний з 2 кроками	Комбінований
MAPE	0,4999	0,0453	0,0332

ВИСНОВКИ

- ✓ Досліджено класичні моделі (біноміальна, Блека-Шоулза) та їх модифікації;
- ✓ Проведено порівняльний аналіз розглянутих моделей;
- ✓ Модифіковані моделі мають значно вищу точність – перевірено на реальних даних;
- ✓ Модифіковані моделі складніші в розрахунках;

СПИСОК ОСНОВНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- Методы и алгоритмы финансовой математики / Ю-Д. Люу ; пер. с англ. С. В. Жуленёва под ред. Е. В. Чепурина. - Москва : БИНОМ. Лаб. знаний, 2010. – 751 с
- Халл Дж.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты, 6-е изд.: Пер. с англ. – М.: ООО «ИД Вильямс», 2007. – 1056 с.
- Количественные методы в финансах / Терри Дж. Уотшем, Кейт Параммоу, Пер. с анг. – проф. Еримова М.Р., - М. «Финансы», 1999. – 577 с.
- Фельдман А.Б. Производные финансовые и товарные инструменты/ Фельдман А.Б. – Экономика. Высшее образование, 2008. – 472 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ